建設基礎数学A 演習問題 No.9 解答

問題 1. 次の導関数・高階導関数を計算せよ。

(1) $(x^3)' = 3x^2,\ (x^3)'' = (3x^2)' = 6x,\ (x^3)''' = (6x)' = 6,$

$(x^3)^{(4)} = (6)' = 0,\ n = 4, 5, 6, \cdots$ のとき $(x^3)^{(n)} = 0,$

(2) $(\sqrt{x^2+1})'$ を計算しよう。$t = x^2+1$, $y = \sqrt{x^2+1}$ とおくと $y = \sqrt{x^2+1}$ は $y = \sqrt{t}$, $t = x^2+1$ の合成関数であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sqrt{t}\frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2\sqrt{t}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

である。つぎに

$$(\sqrt{x^2+1})'' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{(x)'\sqrt{x^2+1} - x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - x\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

(3) 積の微分法により, $(xe^x)' = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x$

(4) (1) の結果を, 積の微分法によりさらに微分すると

$(xe^x)'' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$

(5) (3), (4) の計算を繰り返せば

$(xe^x)^{(n)} = ne^x + xe^x \cdots (\star),\ n = 1, 2, \cdots$

となることが予想されるが, これを数学的帰納法で示そう。

(3) より $n = 1$ のときは正しい。

$(xe^x)^{(n-1)} = (n-1)e^x + xe^x$

が正しいと仮定すると（帰納法の仮定), 両辺微分して

$(xe^x)^{(n)} = (n-1)e^x + (x)'e^x + x(e^x)' = (n-1)e^x + e^x + xe^x = ne^x + xe^x$

となるから n の時も正しい。したがってすべての n に対して正しい.

教科書 99 ページの Leibnitz の公式を使ってもよい。

問題 2. (発展問題) (1) 関数 $f(x)$ は何回でも微分できるとするとき,

$$(xf(x))^{(n)} = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$$

であることを確かめよ。(数学的帰納法を使う。)

(i) $n = 1$ のとき正しいことを示す。

積の微分法を使って

$$\text{左辺} = (xf(x))' = xf'(x) + (x)'f(x) = xf'(x) + f(x) = \text{右辺}$$

だから正しい。

(ii) $n-1$ のとき正しいことを仮定すると n のときも正しいことを示す。

$$\text{左辺} = ((xf(x))^{(n-1)})'$$

$n-1$ のときは正しいから

$$= (xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x))'$$

積の微分法を使って

$$\begin{aligned} &= (x)'f^{(n-1)}(x) + xf^{(n)}(x) + (n-1)f^{(n-1)}(x) \\ &= xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) \\ &= \text{右辺} \end{aligned}$$

だから正しい。

(i), (ii) をあわせてすべての n に対して正しいことが分かった。

(2) $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ をくり返し使って (教科書 86 ページを見よ。)

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

が分かるから, (1) で $f(x) = \sin x$ として

$(x\sin(x))^{(n)} = x\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n\sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$

がえられる。

問題 3. (まとめてやる。各自アレンジして解答すること)

関数 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ の n 階導関数を計算せよ.

$1 - x = t$ とおくと

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = t^{-1},$

だから 合成関数の微分法を使うと

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(t^{-1}) = \dfrac{dt}{dx}\,\dfrac{d}{dt}(t^{-1}) = (-1)\cdot(-1)\,t^{-2} = t^{-2},$

$f''(x) = \dfrac{dt}{dx}\,\dfrac{d}{dt}(t^{-2}) = (-1)\cdot(-2)t^{-3} = 2\,t^{-3},$

$f'''(x) = \dfrac{dt}{dx}\,\dfrac{d}{dt}\,(2t^{-3}) = (-1)\cdot(2\cdot(-3)t^{-4}) = 2\cdot 3\cdot t^{-4}.$

これを繰り返して

$f^{(n)}(x) = n!\,t^{-(n+1)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$