

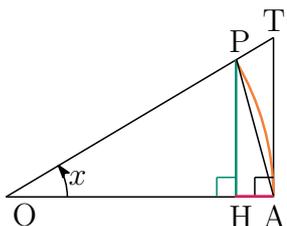
建設基礎数学 A 第8回 解答

問題.1 (1)

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

だから $x \rightarrow 0$ とすると $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots (*)$ により

$$\rightarrow 1 \times \frac{0}{2} = 0.$$



(2) $(\sin x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ であるが \sin の加法定理により

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

ここで $h \rightarrow 0$ とすると $(*)$, (1) により

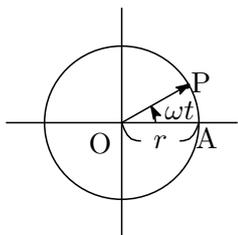
$$\rightarrow \cos x$$

だから

$$(\sin x)' = \cos x$$

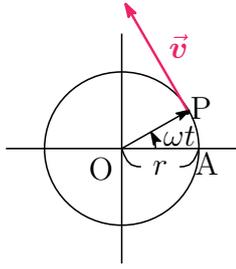
問題.2 点 P は原点中心半径 r の円周上を、時刻 0 で点 $A(r, 0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している。

(1) このとき、時刻 t における P の座標を t を用いて表せ。



角速度が ω だから P は時刻 t には円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る。だから $(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ である。

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を求めよ。



速度ベクトルの成分表示は P の座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{v}(t) = ((r \cos \omega t)', (r \sin \omega t)') = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

問題.3 (1) $y = \sin(3x - 2)$ のとき $3x - 2 = t$ とおくと $y = \sin(3x - 2)$ は $y = \sin t$ と $t = 3x - 2$ の合成関数となる.

$$t = 3x - 2 \text{ より } \frac{dt}{dx} = 3,$$

$$y = \sin t \text{ より } \frac{dy}{dt} = \cos t$$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 3 \cos t = 3 \cos(3x - 2).$$

(2) $y = \cos(3x - 2)$ のとき, $3x - 2 = t$ とおくと $y = \cos(3x - 2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x - 2$ の合成関数となる.

$$t = 3x - 2 \text{ より } \frac{dt}{dx} = 3,$$

$$y = \cos t \text{ より } \frac{dy}{dt} = -\sin t$$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3 \sin(3x - 2).$$

(3) $y = \sin(x^2 + 1)$ のとき $x^2 + 1 = t$ とおくと関数 $y = \sin(x^2 + 1)$ は関数 $y = \sin t$, $t = x^2 + 1$ の合成関数となる.

$$t = x^2 + 1 \text{ より } \frac{dt}{dx} = 2x,$$

$$y = \sin t \text{ より } \frac{dy}{dt} = \cos t$$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2x \cos t = 2x \cos(x^2 + 1).$$

(4) $y = \cos(x^2 + 1)$ のとき $x^2 + 1 = t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

であり, また $y = \cos t$ だから

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

である. 関数 $y = \cos(x^2 + 1)$ は関数 $y = \cos t$, $t = x^2 + 1$ の合成関数であるから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 2x(-\sin t) = -2x \sin(x^2 + 1).$$

(5) $y = \tan(3x - 2)$ のとき, $3x - 2 = t$ とおくと

$y = \tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

である. あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = 3 \frac{1}{\cos^2 t} = \frac{3}{\cos^2(3x - 2)}.$$

(6) $y = \cos^3(3x - 2)$ のとき,

$3x - 2 = t$, $\cos(3x - 2) = s$ とおくと $y = s^3$, $s = \cos t$ だから $y = \cos^3(3x - 2)$ は

$$y = s^3, \quad s = \cos t, \quad t = 3x - 2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds} = 3s^2, \quad \frac{ds}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dt}{dx} = 3$$

だから合成関数の微分法 (3つ以上の関数の合成の場合にも使える) により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = 3s^2 \times (-\sin t) \times 3 = -9 \sin(3x - 2) \cos^2(3x - 2).$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & t & \xrightarrow{\quad} & s & \xrightarrow{\quad} & y \\
 \vdots & & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel \\
 & & 3x-2 & & \cos t & & s^3 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \frac{dy}{dx} & = & \frac{dt}{dx} & \times & \frac{ds}{dt} & \times & \frac{dy}{ds}
 \end{array}$$

(7) $y = \cos((3x-2)^3)$ のとき,

$3x-2 = t$, $(3x-2)^3 = s$ とおくと $y = \cos s$, $s = t^3$ だから $y = \cos((3x-2)^3)$ は

$$y = \cos s, \quad s = t^3, \quad t = 3x - 2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds} = -\sin s, \quad \frac{ds}{dt} = 3t^2, \quad \frac{dt}{dx} = 3$$

だから合成関数の微分法 (3つ以上の関数の合成の場合にも使える) により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = -\sin s \times 3t^2 \times 3 = -9 \sin((3x-2)^3) (3x-2)^2.$$

図式的に書くと

$$\begin{array}{ccccccc}
 x & \xrightarrow{\quad} & t & \xrightarrow{\quad} & s & \xrightarrow{\quad} & y \\
 \vdots & & \parallel & \vdots & \parallel & \vdots & \parallel \\
 & & 3x-2 & & t^3 & & \cos s \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \frac{dy}{dx} & = & \frac{dt}{dx} & \times & \frac{ds}{dt} & \times & \frac{dy}{ds}
 \end{array}$$

(8) 商の微分法により

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)' &= \frac{(\sin x)'(1 + \cos x) - \sin x(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} \\
 &= \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}.
 \end{aligned}$$

(9) $y = e^{\sin x}$, $t = \sin x$ とおく.

関数 $y = e^{\sin x}$ は関数 $t = \sin x$, $y = e^t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \cos x \times e^t = e^{\sin x} \cos x$$

となる.

(10) $y = \log(\cos x)$, $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = \log(\cos x)$ は関数 $t = \cos x$, $y = \log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = -\sin x \times \frac{1}{t} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

となる.

(11) 積の微分法により

$$(e^{2x} \cos 3x)' = (e^{2x})' \cos 3x + e^{2x} (\cos 3x)' = 2e^{2x} \cos 3x - 3e^{2x} \sin 3x.$$

(12) $y = x \cos x$ のとき積の微分法により

$$y' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$$

(13) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \cos x)'(1 - \sin x) - (1 + \cos x)(1 - \sin x)'}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1 - \sin x) - (1 + \cos x)(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x + \cos x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1 - \sin x + \cos x}{(1 - \sin x)^2} \end{aligned}$$

(14) $t = \frac{x}{a}$ とおく.

関数 $y = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ は関数 $y = \frac{1}{a} \tan^{-1} t$, $t = \frac{x}{a}$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

となる。