

建設基礎数学 A 第7回 解答

問題 1.

(1) $y = e^x$

$(\log y)' = \frac{1}{y}$ から導く。 $y = e^x$ は $x = \log y$ の逆関数であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} \log y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x,$$

(2) $y = \log x$ の導関数は $t \rightarrow 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}} \rightarrow e$ であることを使う

$$\begin{aligned} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} &= \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \log \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right\} \end{aligned}$$

ここで $t = \frac{h}{x}$ とおくと $t \rightarrow 0$ だから

$$= \frac{1}{x} \log \left\{ (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} \rightarrow \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

だから $y' = \frac{1}{x}$

(3) $y = e^{ax}$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = e^{ax}$ は関数 $y = e^t$, $t = ax$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = a, \quad \text{また (1) より } \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t \times a = a e^{ax}$$

となる.

(4) $y = \log(ax)$ のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = \log(ax)$ は関数 $y = \log t$, $t = ax$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(ax) = a, \quad \text{また (2) より } \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \log t = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times a = \frac{1}{x}$$

となる.

$$(\log(ax))' = (\log x)'$$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$$\log(ax) = \log a + \log x$$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(5) 積の微分法と (3) により

$$(xe^{3x})' = (x)'e^{3x} + x(e^{3x})' = e^{3x} + x(3e^{3x}) = (1 + 3x)e^{3x}.$$

(6) $y = e^{x^2+2x}$ のとき $t = x^2 + 2x$ とおく.

関数 $y = e^{x^2+2x}$ は関数 $y = e^t$, $t = x^2 + 2x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2x + 2, \quad \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = e^t \times (2x + 2) = (2x + 2)e^{x^2+2x}$$

となる.

(7) $-1 < x < 1$ としてください。 $y = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$, $t = \frac{-1}{1-x^2}$, $s = 1 - x^2$ とおく.

関数 $y = e^{\frac{-1}{1-x^2}}$ は関数 $s = 1 - x^2$, $t = \frac{-1}{s}$, $y = e^t$ の合成関数である.

$$\frac{ds}{dx} = -2x$$

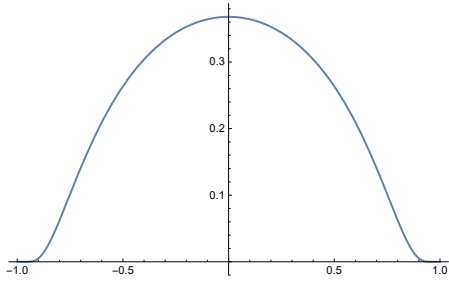
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ds}{dx} \frac{dt}{ds} \frac{dy}{dt} = -2x \times \frac{1}{s^2} \times e^t = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} e^{\frac{-1}{1-x^2}}$$

となる. 合成関数の微分法は, このように3個の関数の合成のときも使ってよい.



(8) $y = \log(x^2 + 1)$, $t = x^2 + 1$ とおく.

関数 $y = \log(x^2 + 1)$ は関数 $t = x^2 + 1$, $y = \log t$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = 2x \times \frac{1}{t} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

となる.

(9) $y = \log|x + \sqrt{x^2 + 1}|$, $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$ とおく.

関数 $y = \log|x + \sqrt{x^2 + 1}|$ は関数 $y = \log|t|$, $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$

の合成関数である.

まず $(\sqrt{x^2 + 1})'$ を計算しよう. $z = \sqrt{x^2 + 1}$ とおくと $t = x + z$ であるが, ここで $s = x^2 + 1$ とおくと $z = \sqrt{x^2 + 1}$ は $z = \sqrt{s}$, $s = x^2 + 1$ の合成関数であり, 合成関数の微分法により

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{d}{ds} \sqrt{s} \frac{d}{dx} (x^2 + 1) = \frac{1}{2\sqrt{s}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

である. (これが大事な導関数である.)

再び y, t にもどると

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} (x + z) = 1 + \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \times \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1}) \times \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+\sqrt{x^2+1})\times\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

(10) $y = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ のとき $t = \frac{x-a}{x+a}$ とおくと $y = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$ は $y = \frac{1}{2a} \log |t|$, $t = \frac{x-a}{x+a}$ の合成関数になる。

$$\frac{dt}{dx} = \left(\frac{x-a}{x+a} \right)' = \frac{(x-a)'(x+a) - (x-a)(x+a)'}{(x+a)^2} = \frac{2a}{(x+a)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2a} \log |t| \right) = \frac{1}{2at}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{dy}{dt} = \frac{2a}{(x+a)^2} \times \frac{1}{2at} = \frac{1}{(x+a)(x-a)}$$

となる.

(11) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \cosh x$$

(12) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \sinh x$$

(13) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (これを $\tanh x$ と書く。) のとき商の微分法により

$$\begin{aligned} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)' &= \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{(\cosh x)^2}. \end{aligned}$$

これは $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ に似ている。

(14) $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ のとき, 商の微分法により

$$y' = \frac{(e^x)'(1+e^x) - (e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x) - (e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

(15) $y = \frac{x+2}{(x+1)(x-1)}$ とおき対数微分法を使う.

$$\log y = \log(x+2) - \log(x+1) - \log(x-1)$$

だから

$$\begin{aligned}(\log y)' &= (\log(x+2))' - (\log(x+1))' - (\log(x-1))' \\ &= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)}.\end{aligned}$$

一方 $(\log y)' = \frac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)'y = -\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

(16) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ とおき対数微分法を使う.

$$\log y = \frac{1}{2}(\log(x+1) - \log(x-1))$$

だから

$$(\log y)' = -\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

一方 $(\log y)' = \frac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)'y = -\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(17) $y = x^\alpha$ ($x > 0$) (α は実数の定数. 対数微分法を使え)

両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \log x$$

が成り立つ. 両辺を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}(\text{左辺}) = \frac{d}{dy}(\log y) \frac{y}{x} = \frac{y'}{y}$$

$$\frac{d}{dx}(\text{右辺}) = \alpha \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\alpha}{x}$$

である。したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

である。