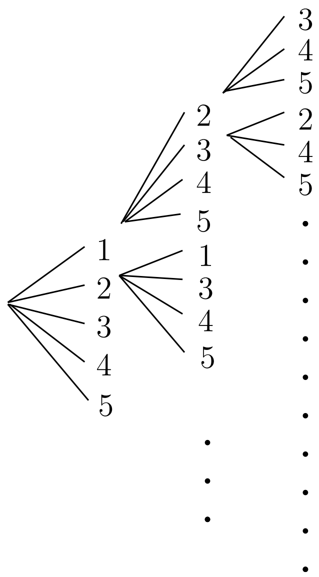
建設基礎数学 A No. 4 解答

1. (1) $\{1,2,3,4,5\}$ から 3 個取って並べてできる順列を全て書け.

樹形図を使えば以下のように体系的に列挙できる.



(1,2,3)	(1,2,4)	(1,2,5)
(1,3,2)	(1,3,4)	(1,3,5)
(1,4,2)	(1,4,3)	(1,4,5)
(1,5,2)	(1,5,3)	(1,5,4)
(2,1,3)	(2,1,4)	(2,1,5)
(2,3,1)	(2,3,4)	(2,3,5)
(2,4,1)	(2,4,3)	(2,4,5)
(2,5,1)	(2,5,3)	(2,5,4)
(3,1,2)	(3,1,4)	(3,1,5)
(3,2,1)	(3,2,4)	(3,2,5)
(3,4,1)	(3,4,2)	(3,4,5)
(3,5,1)	(3,5,2)	(3,5,4)
(4,1,2)	(4,1,3)	(4,1,5)
(4,2,1)	(4,2,3)	(4,2,5)
(4,3,1)	(4,3,2)	(4,3,5)
(4,5,1)	(4,5,2)	(4,5,3)
(5,1,2)	(5,1,3)	(5,1,4)
(5,2,1)	(5,2,3)	(5,2,4)
(5,3,1)	(5,3,2)	(5,3,4)
(5,4,1)	(5,4,2)	(5,4,3)

(2) $\{1,2,3,4,5\}$ から 3 個取ってできる組合せを全て書け.

3 つの数 a, b, c を並べてできる列 (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), $\cdots$ は $3! = 6$ 通りづつあるが, その内 1 番目 <2 番目 <3 番目 となる列が一つだけあるからこれを代表として取り出せばよい. そういう列だけ取り出せば全ての組合せが得られることになる. 赤く表示した列がそれである.

2. (1) $0! = 1$ に注意して

$$ {}_2C_0 = \frac{2!}{(2-0)!0!} = 1 \quad {}_2C_1 = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2 \quad {}_2C_2 = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1 $$

$${}_3C_0 = \frac{3!}{(3-0)!0!} = 1 \quad {}_3C_1 = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3 \quad {}_3C_2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$
$${}_3C_3 = \frac{3!}{(3-3)!3!} = 1$$
$${}_4C_0 = \frac{4!}{(4-0)!0!} = 1 \quad {}_4C_1 = \frac{4!}{(4-1)!1!} = 4 \quad {}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$
$${}_4C_3 = \frac{4!}{(4-3)!3!} = 4 \quad {}_4C_4 = \frac{4!}{(4-4)!4!} = 1$$

(2)

$$\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}$$

これから係数だけを抜き出してできる

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

を Pascal の三角形という。規則性を発見せよ。

3. 次のことを確かめよ.

(1) ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$ であること.

${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ だから

$${}_n\mathrm{C}_0 = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = 1\,, \quad {}_n\mathrm{C}_n = \frac{n!}{0! \cdot n!} = 1$$

だから等しい.

$0! = 1$ に気をつけよ.

(2) ${}_n\mathrm{C}_1 = {}_n\mathrm{C}_{n-1} = n$ であること.

$${}_n\mathrm{C}_1 = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n\,, \quad {}_n\mathrm{C}_{n-1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$$

だから等しい.

(3) ${}_n\mathrm{C}_k = {}_n\mathrm{C}_{n-k}$ であること.

${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, 一方 ${}_n\mathrm{C}_{n-k} = \dfrac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!}$

だから等しい.

(4) ${}_n\mathrm{C}_k + {}_n\mathrm{C}_{k-1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_k$ であること.

$$\text{左辺} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}$$

$$= \frac{n! \times (n-k+1)}{(n-k)!k! \times (n-k+1)} + \frac{n! \times k}{(n-k+1)!(k-1)! \times k}$$

$$= \frac{n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} + \frac{n!k}{(n-k+1)!k!}$$

$$= \frac{n!\{(n-k+1)+k\}}{(n-k+1)!k!} = \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} = \text{右辺}$$

だから等しい.

4. (1) 関数 $f(x)$ の, a における微分係数 $f'(a)$ を定義する式を書け.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a は定数であることに注意。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義する式を書け.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x は変数であることに注意。

(3) $f(x) = x^2$ とする. この関数の 1 における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ のとき $f(1) = 1^2$, $f(1+h) = (1+h)^2$ に注意せよ。

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2h + h^2}{h}$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

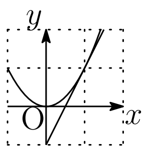
$$= \lim_{h \to 0}(2+h) = 2$$

(4) (3) の関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

接線は, 傾きは $f'(1) = 2$ で点 $(1, f(1)) = (1, 1)$ を通る直線だから

$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$

(5) (3) の関数のグラフと, (4) で求めた接線を書け.



1 メモリは 1

(6) (3) の関数の導関数 $f'(x)$ を求めよ.

$f(x) = x^2$ のとき $f(x) = x^2$, $f(x+h) = (x+h)^2$ に注意せよ。

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{2xh + h^2}{h}$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

5. $f(x) = x^2 - 2x$ とする.

(1) この関数の 2 における微分係数 $f'(2)$ を求めよ.

$f(x) = x^2 - 2x$ のとき $f(1) = 1^2 - 21$, $f(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h)$ に注意せよ。

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\{(2+h)^2 - 2(2+h)\} - \{(2)^2 - 2 \times 2\}}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{4h + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2h}{h}$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h \to 0}(h+2) = 2$$

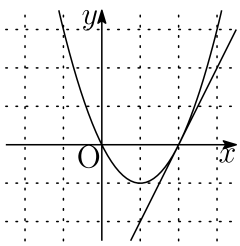
(2) この関数のグラフの, x 座標が 2 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 2 である点は $(2, f(2)) = (2, 0)$ である.

傾きは $f'(2) = 2$ だから

$y = 2(x-2) + 0 = 2x - 4$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.



問題 6. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする.

(1) この関数の $x = 1$ における微分係数 $f'(1)$ を求めよ.

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f(1) = \dfrac{1}{1}$, $f(1+h) = \dfrac{1}{(1+h)}$ に注意せよ。

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1-(1+h)}{1+h}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{1-h}$$

$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1-h} = -1$$

(2) この関数のグラフの, x 座標が 1 である点における接線の方程式を求めよ.

x 座標が 1 である点は $(1, f(1)) = (1, 1)$ である.

傾きは $f'(1) = -1$ だから

$y - 1 = -1(x-1)$ 整理して $y = -x + 2$

(3) この関数のグラフと, (2) で求めた接線を書け.