建設基礎数学 A 第3回　解答

記号の使い方に気を付けて筋の通った書き方をしてください。

問題 1. (1) $x \to 1 \pm 0 \iff x - 1 \to \pm 0$ だから

$$\lim_{x \to 1 \pm 0} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

または

$$\frac{x}{x-1} \to \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

(2) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1 - \pm 0} = \frac{1}{1 \mp 0} = 1 \pm 0,$$

または

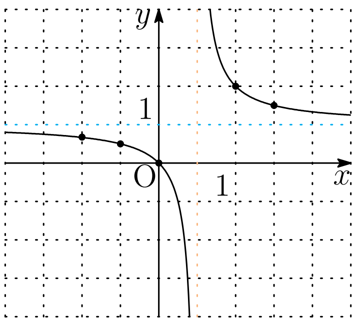
$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \to \frac{1}{1 - \frac{1}{\pm\infty}} = \frac{1}{1 - \pm 0} = \frac{1}{1 \mp 0} = 1 \pm 0.$$

$\left(\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1} \to 1 + \frac{1}{\pm\infty} = 1 + (\pm 0) = 1 \pm 0 \right.$ とした人がいましたが、わかりやすい解法です。$\left. \right)$

まとめると

x	$-\infty$	-2	-1	0	1 ± 0	2	3	$+\infty$
$x-1$	$-\infty$	-3	-2	-1	± 0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$1-0$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\pm\infty$	2	$\frac{3}{2}$	$1+0$

(3) この表を使ってグラフの概形を書くと下のようになる.



問題 2. (1) $\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x - 3 \neq 0$ としてよいから約分ができて

$$\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=x+2$$
ここで $x\to 3$ とすると

$$\to 5.$$
だから,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+2)=5.$$
また

$$\frac{x^2-x-6}{x-3}=x+2\to 5 \quad (x\to 3).$$
でもよい.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x\neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x}{x^2+x}=\frac{x}{x(x+1)}=\frac{1}{x+1}$$
ここで $x\to\infty$ とすると

$$\frac{1}{x+1}\to\frac{1}{\infty+1}=\frac{1}{\infty}=0.$$
だから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+x}=0.$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}$

$\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $x\neq 0$ としてよいから分母分子が約分できて

$$\frac{x^2}{x^2+x}=\frac{x^2}{x^2(1+\frac{1}{x})}=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$
ここで $x\to\infty$ とすると

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\to\frac{1}{1+0}=1.$$
だから

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1.$$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように変形を行ってから極限を求める.

$$\frac{(2+h)^2-4}{h}=\frac{4+4h+h^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}$$

$h\neq 0$ としてよいから約分ができて

$$=4+h$$

ここで $t\to 0$ とすると

$$\to 4.$$

だから

$$\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-4}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

または

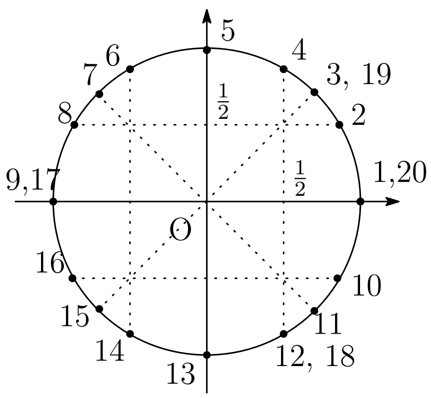
$$\frac{(2+h)^2-4}{h}=\frac{4h+h^2}{h}=(4+h)\to 4$$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)}=-\frac{1}{4}$

または

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(2+h)}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{h}\left(\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right)=\frac{-1}{2(2+h)}\to-\frac{1}{4}$$

問題 3.



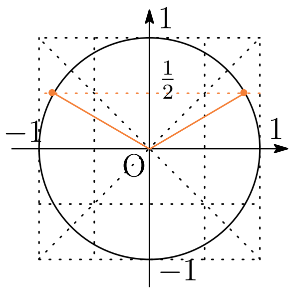
問題 4.

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3}$	$\pm\frac{3\pi}{4}$	$\pm\frac{5\pi}{6}$	$\pm\pi$
度数	0	$\pm30^\circ$	$\pm45^\circ$	$\pm60^\circ$	$\pm90^\circ$	$\pm120^\circ$	$\pm135^\circ$	$\pm150^\circ$	180°
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin\theta$	0	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	±1	$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	±1	$\pm\sqrt{3}$	定義できない	$\mp\sqrt{3}$	∓1	$\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

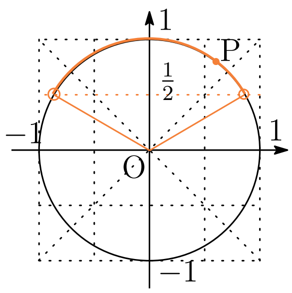
問題.5

(1) $2\sin\theta = 1 \;\Leftrightarrow\; \sin\theta = \frac{1}{2}$

これと **問題.3** の答えの図を比較して $\theta = \frac{\pi}{6}$ と $\frac{5\pi}{6}$.



(2) $\sin\theta > \frac{1}{2}$



図において, P は単位円周上を A から θ ラジアン回転した点とする. このとき P の座標は $(\cos\theta, \sin\theta)$ である.

$$\sin\theta > \frac{1}{2}$$

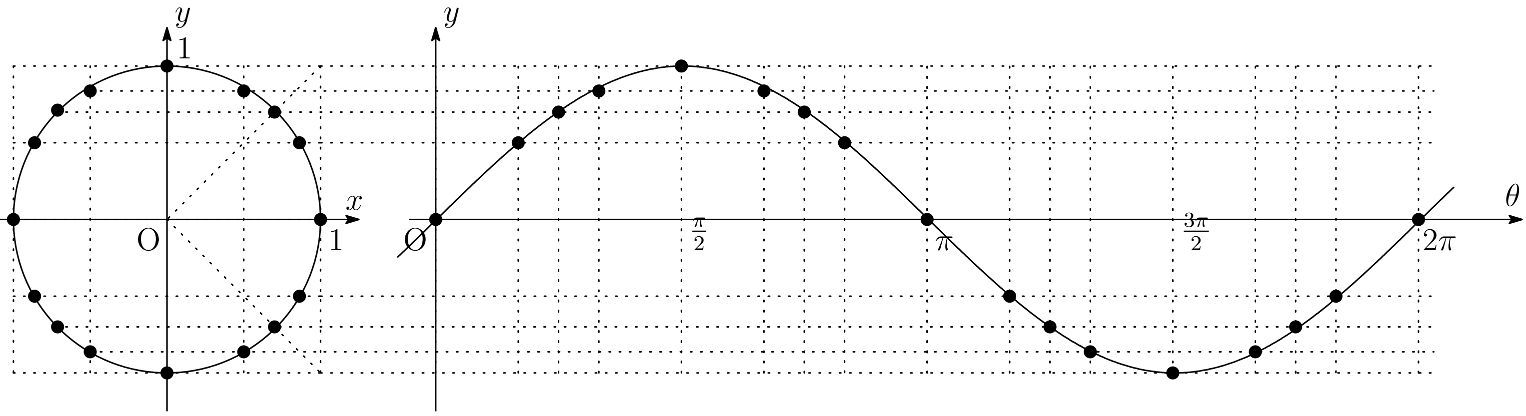
であるとき P は図の太線の部分にあるので前問の結果を使って

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}.$$

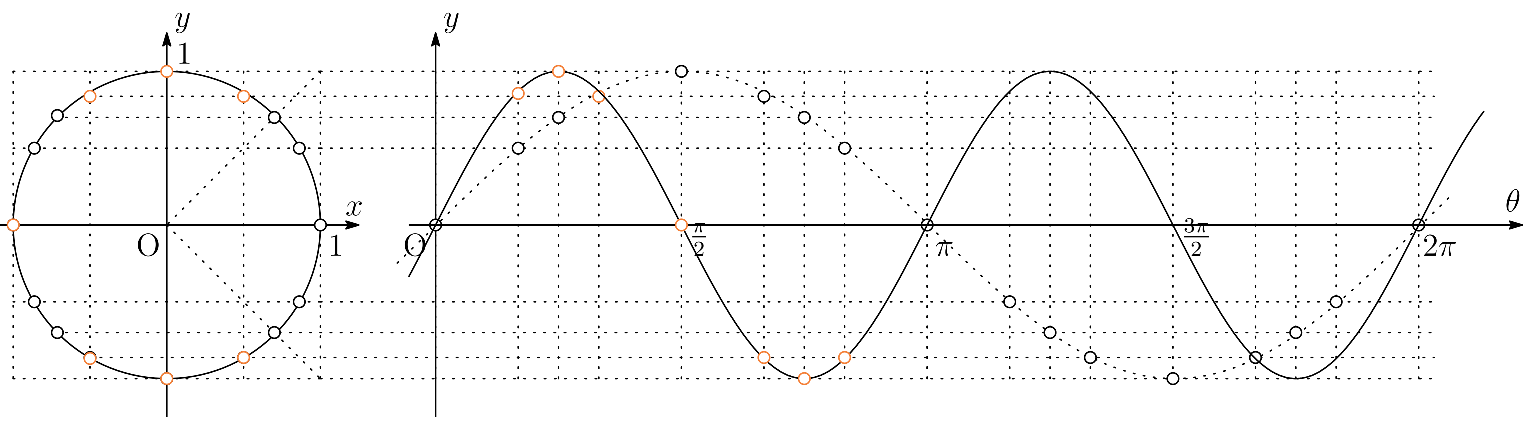
であることが分かる.

問題.6　次の目盛りを用いてグラフを描け.

(1)　$y = \sin\theta$



(2)　$y = \sin 2\theta$



(3) $y = 2\sin\theta$