建設基礎数学A 演習問題 No. 2 解答
電気系

1 (1) $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{+\infty} = +0.$$

である。

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

と書いても同じことである.

(2) ∞ を含む計算の約束を使うと $2\times(+\infty) = +\infty$ だから, $n \to +\infty$ のとき

$$\frac{1}{2n} \to \frac{1}{2\times(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

である.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2\times(+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = +0$$

と書いても同じことである.

(3) ∞ を含む計算の約束を使うと $2\times(+\infty) = +\infty$, $+\infty - 1 = +\infty$ だから

$$\frac{1}{2n-1} \to \frac{1}{2\times(+\infty)-1} = \frac{1}{+\infty} = +0.$$

(4) 「n を限りなく大きくする」と, 「n は限りなく大きくなる」ので定義より

$$\lim_{n \to +\infty} n = +\infty.$$

(5) $n \to +\infty$ のとき

$$\sqrt{n} \to +\infty$$

である.

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

と書いても同じことである.

これは次のように考えればよい.

「n を限りなく大きくすると $\sqrt{n}$ が限りなく大きくなる」事を示せばよい。

どんなに大きい数 M が与えられても n は限りなく大きくなるのだからある番号 N があって

$$n \geqq N \;\Rightarrow\; \; n > M^2$$

としてよい。したがって

$$n \geqq N \;\Rightarrow\; \; \sqrt{n} > M$$

である. したがって $\sqrt{n}$ は限りなく大きくなることが示された。

(実は, $\lim_{a_n} = +\infty$ であることの厳密な定義は

「任意の実数 M に対してある自然数 N があって

$$n \geqq N \;\Rightarrow\; a_n > M$$

となる. 」

ということである.)

(6) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を n で割って

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}}$$

としてから $n \to +\infty$ とすると

$$\frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2-(+0)} = \frac{1}{2}$$

となると考えればよい.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2-\frac{1}{+\infty}} = \frac{1}{2-(+0)} = \frac{1}{2}.$$

と書いてもよいが 2 種類の書き方を混用しないこと.

(7) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を n で割って

$$\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

としてから $n\to+\infty$ とすると

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\to\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{1}{+\infty}}=\frac{1+0}{2-(+0)}=\frac{1}{2}$$

となると考えればよい.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{2-\frac{1}{+\infty}}=\frac{1+0}{2-(+0)}=\frac{1}{2}.$$

と書いてもよいが 2 種類の書き方を混用しないこと.

(8) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を n で割ると

$$\frac{3n-1}{2n^2+3}=\frac{3-\frac{1}{n}}{2n+\frac{3}{n}}.$$

ここで $n\to+\infty$ とすると $\dfrac{3}{n}\to+0$ だから

$$\frac{3-\frac{1}{n}}{2n+\frac{3}{n}}\to\frac{3-(+0)}{2\times(+\infty)+0}=\frac{3}{+\infty}=+0.$$

また,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{2n^2+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{2n+\frac{3}{n}}=\frac{3-(+0)}{2\times(+\infty)+0}=\frac{3}{+\infty}=+0$$

と書いてもよいが 2 種類の書き方を混用しないこと.

(9) $\infty-\infty$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める.

$$n-n^2=(1-n)n.$$

ここで $n\to+\infty$ とすると

$$(1-n)n\to(1-\infty)\times(+\infty)=(-\infty)(+\infty)=-\infty.$$

(10) $\infty-\infty$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

ここで $n \to +\infty$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{\infty+\infty} = +0.$$

2 (1) $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$ だから $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0.$

(2) $\frac{3}{2} > 1$ だから $\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty.$

(3) $1.2 > 1$ だから $(1.2)^n \to +\infty.$

(4) $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. 分母分子を 2^n でわると,

$$\frac{2^{n+1}}{2^n+3^n} = \frac{2}{1+\frac{3^n}{2^n}} = \frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n}.$$

ここで $n \to \infty$ とすると,$\left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty$ だから,

$$\frac{2}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^n} \to \frac{2}{1+\infty} = 0.$$

(5) $\frac{\infty}{\infty}$ 型の不定形であるから, 不定形でなくなるように適当な変形を行ってから極限を求める. $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$ だから

$$\frac{4^{n+2}}{2^{2n}+3^n} = \frac{4^2}{1+\frac{3^n}{4^n}} = \frac{4^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} \to \frac{16}{1+0} = 16.$$

6.3 (1) $(0.99)^n \leqq 0.01$ の両辺の常用対数を取ると $\log_{10}(0.99)^n \leqq \log_{10} 0.01$ となるが $\log_{10}(0.99)^n = n\log_{10} 0.99 = -0.0043648\,n$, $\log_{10} 0.01 = -2$ だから $n \geqq \frac{2}{0.0043648} = 458.2\cdots$. だから $n \geqq 459$ ならばよい.