本日やること

1. 連立 1 次方程式と行列
   - 掃き出し法と階段行列
   - 逆行列と連立 1 次方程式
   - 逆行列を用いた連立一次方程式の解法
   - 行列の階数

連立 1 次方程式と行列

復習：連立方程式・行基本変形

[復習：連立方程式・拡大係数行列]

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ とおく。拡大係数行列という。

連立 1 次方程式と行列

行基本変形

[復習：行基本変形] 拡大係数行列 $\tilde{A}$ に対して

(I) 1 つの行に 0 でない数をかける。

(II) 1 つの行にある実数をかけたものを他の行に加える (または引く)

(III) 2 つの行を入れ替える

という変形をしても解は変わらない。この変形を行基本変形という。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法 (その 1)

拡大係数行列 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ において条件

$P(i,j)$: (i) $a_{ij} \neq 0$,
(ii) $a_{i1} = \cdots = a_{i\,j-1} = 0$ ($j = 1$ のときは満たされていると考える)

を満たすとき

$Q(i,j)$: (i) 第 i 行を a_{ij} で割る,
(ii) 第 k 行 ($i \neq k$) から第 i 行の a_{kj} 倍を引く

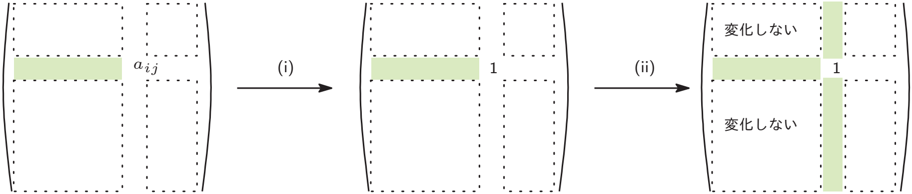
ということを行うと

$a_{ij} \to 1$, $a_{kj} \to 0$, $(i \neq k)$, 第 1 列から第 $j-1$ 列は変化しない。

のように変形される。この手続きを a_{ij} を要（かなめ・Pivot）として第 j 列を掃き出すという。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法



(緑は成分が 0 であることを表す)

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法（その 2）

この手続きを第 1 列から始めて, 次のように繰り返す。

1. 最初の Pivot の選び方：
   (1.1) 第 1 列の成分のうち 0 でないものを選び, 行を入れ替えて第 1 行に持ってきて, これを Pivot として第 1 列を掃き出す。

   (1.2) 第 1 列の成分がすべて 0 のときは, 第 2 列で前項のことを行う。以下同様。

2. 前段階の Pivot が a_{ij} であるときの次の Pivot の選び方：
   (2.1) $j+1$ 列から $P(i,j+1)$ を満たすものをさがし, 行の入れ替えで $(i+1,j+1)$ 成分に持ってきて, これを Pivot にして第 $j+1$ 列を掃き出す。

   (2.2) $a_{i+1\,j+1},\cdots,a_{m\,j+1}$ がすべて 0 であるときは第 $j+2$ 列に移って前項のことを行う。以下同様。

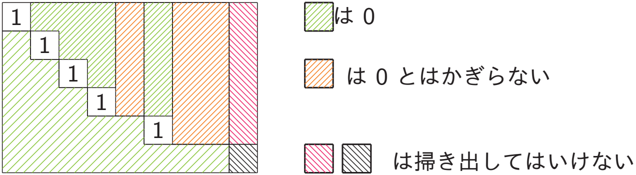
3. j が n に達したらやめる。右端の列は掃き出さない。

連立 1 次方程式と行列

掃き出し法

Pivot・掃き出し法（その 3）

このことにより次のような階段行列



に変形することができる。

連立 1 次方程式と行列

逆行列と連立 1 次方程式

復習：掃き出し法による逆行列の求め方

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となったとすると

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

となる。

行基本変形が途中で行き詰まる $\iff$ A は逆行列を持たない

この方法は n 次正方行列でも正しい。

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

[逆行列を用いた連立一次方程式の解法]

$$(5)\quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

を逆行列を用いて解く

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}}_{\vec{\boldsymbol{b}}}$$

$$\iff A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$$

連立 1 次方程式と行列

逆行列を用いた連立一次方程式の解法

A が正則ならば A^{-1} をかけて

$A^{-1}A\vec{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\vec{\boldsymbol{b}}$

$A^{-1}A = E$ だから右辺 $= E\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}$ で

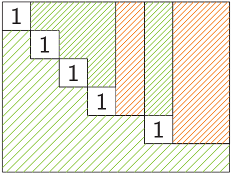
$\iff \vec{\boldsymbol{x}} = A^{-1}\vec{\boldsymbol{b}}$

A が正則でないときは (5) は不定または不能。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

行列の階数

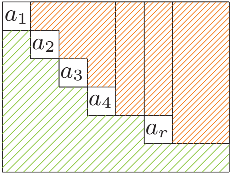


のような行列を階段行列という。0 でない行の数を階段行列の階数という。$m \times n$ 型行列 A が行基本変形により階段行列に変形されるとき、変形された階段行列の階数はもとの行列により決まってくる。この数を A の階数といい $\mathrm{rank}(A)$ で表す。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

[注意]　教科書では



は 0

 は 0 とはかぎらない

$a_1, \cdots, a_r$ は 0 でない

の形の行列を階段行列とよんでいるが, 本質的に同じことで階数の定義に影響はない。

連立 1 次方程式と行列

行列の階数

$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(\tilde{A})$ $\Rightarrow$ 連立方程式は解を持たない。

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A})$ $\Rightarrow$ 連立方程式は解を持つ。

$m = n = \mathrm{rank}(A)$ $\Leftrightarrow$ 連立方程式は右辺によらず常にただ一つの解を持つ。