# 本日やること

1. 行列
   - 逆行列

# 行列

## 逆行列

### 第 1 回の問題 6(1)

.
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

自由レポート問題

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 行列
## 逆行列

**逆行列の定義**

$A, X$ : $n$ 次正方行列, $E$ : $n$ 次単位行列 のとき
$X$ は $A$ の逆行列であるとは $AX = XA = E$ となること.
記号 $X = A^{-1}$ で表す.

数の世界では

$a \times 1 = 1 \times a = a$

$a \times x = x \times a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{a}$, ($ax \neq 0$ ならば $a \neq 0$, また $a \neq 0$ なら $\dfrac{1}{a}$ がある)

正方行列の世界では

$AE = EA = A$

$AX = XA = E \quad \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}$, ($A \neq 0$ でも $A^{-1}$ があるとは限らない)

# 行列
## 逆行列

[注意] 正方行列 $A$ の逆行列はただ一つである。

[確かめ] $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ を $\boldsymbol{A}$ の逆行列とする。定義より

$$XA = AX = E, \quad YA = AY = E,$$

だから

$$X = XE = X(AY) = (XA)Y = EY = Y.$$

だから $X = Y$ である。

# 行列

## 逆行列

**2 次正方行列の逆行列の存在する条件**

(i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持つ $\Leftrightarrow$ $ad - bc \neq 0$

このとき $A$ は正則であるという。

(ii) このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

# 行列
## 逆行列

[(i) の $\Leftarrow$, (ii) の確かめ]　$ad - bc \neq 0$ だから

$$X = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$AX = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

同様にして

$$XA = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = E$$

したがって

$$X = A^{-1}$$

# 行列
## 逆行列

[(i) の $\Rightarrow$ の確かめ] $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $AX = E$ とする

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots (\star)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} ax + bz = 1 & ay + bw = 0 \\ cx + dz = 0 & cy + dw = 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} adx + bdz = d & ady + bdw = 0 \\ cbx + dbz = 0 & cby + dbw = b \end{matrix} \Rightarrow \quad (ad-bc)x = d, \quad (ad-bc)y = -b$$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} acx + bcz = c & acy + bcw = 0 \\ cax + daz = 0 & cay + daw = a \end{matrix} \Rightarrow \quad (ad-bc)z = -c, \quad (ad-bc)w = a$$

ここで $ad - bc = 0$ とすると $A = 0$ となり $(\star)$ に反するので矛盾。したがって $ad - bc \neq 0$.

# 行列

## 例題

[例題 6.] $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ とする.

$$AX = B \quad \left( \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \right) \quad \cdots (\star)$$

となる $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求めよ.

[数の世界では] $ax = b \ (a \neq 0)$ の解 $x$ は両辺に $\dfrac{1}{a}$ をかけて

$$\frac{1}{a} ax = \frac{1}{a} b \iff 1\,x = \frac{b}{a} \iff x = \frac{b}{a}$$

これと同じ方法が使えないか?

# 行列

## 例題

[例題 6. の解] $(-1)\cdot 1 - 3\cdot 2 = -7 \neq 0$ だから $A$ は正則で, $A^{-1}$ が存在するから $(\star)$ の両辺にかけて

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \iff EX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$$

とすればよい。

$$A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

だから

$$X = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

# 行列

## 正則行列の積

**正則行列の積**

$n$ 次正方行列 $A$, $B$ が正則であるとき, 積 $AB$ も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

[確かめ] 仮定より $A^{-1}$, $B^{-1}$ が存在する.

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$$
$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

だから定義より $B^{-1}A^{-1}$ は $AB$ の逆行列。