本日やること

1. 行列
   - 行列の積
   - 転置行列
   - 対称行列・交代行列

行列

復習：行列の積の定義

[行ベクトル $\times$ 列ベクトルの場合]

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)$$

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列

復習：行列の積の定義

復習：行列の積の定義

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{ij} & \cdots\cdots & a_{im} \\ a_{l1} & \cdots\cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mk} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1n} \\ & & \\ & c_{ik} & \\ c_{l1} & & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} \left(= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \right)$$

$$i = 1, \cdots, l, \quad k = 1, \cdots, n$$

で定める。

行列
行列の積

行列の積の演算法則

A, B, C : 行列,　k : スカラー, 行列の積が定義されるとき

(I) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

(II) $(AB)C = A(BC)$

(III) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$

[(II) の確かめ] $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{kl})$ とする。
$AB = (\alpha_{ik})$ とおくと $\alpha_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$ だから

$$(AB)C \text{ の } (il) \text{ 成分} = \sum_k \alpha_{ik} c_{kl} = \sum_k \left(\sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k,j} ((a_{ij} b_{jk}) c_{kl})$$

行列
行列の積

一方 $BC = (\beta_{jl})$ とおくと $\beta_{jl} = \sum_k b_{jk} c_{kl}$ だから

$$A(BC) \text{ の } (il) \text{ 成分} = \sum_j a_{ij}\beta_{jl} = \sum_j a_{ij}\left(\sum_k b_{jk}c_{kl}\right) = \sum_{j,k}(a_{ij}(b_{jk}c_{kl}))$$

だから一致する。

[(III) の確かめ] $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, $C = (c_{jk})$ とする。
$B + C = (b_{jk} + c_{jk})$, だから

$$\begin{aligned} A(B+C) \text{ の } (ik) \text{ 成分} &= \sum_k a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_k a_{ik}b_{kj} + \sum_k a_{ik}c_{kj} \\ &= \{AB \text{ の } (ij) \text{ 成分 }\} + \{AC \text{ の } (ij) \text{ 成分 }\} \end{aligned}$$

行列
行列の積

単位行列の性質

(i) $A : m \times n$ 行列, $E : n$ 次単位行列
$\Rightarrow \quad AE = A$

(ii) $A : m \times n$ 行列, $E : m$ 次単位行列
$\Rightarrow \quad EA = A$

[(i) の確かめ]　例で示す。

$$\text{左辺} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \text{右辺}$$

(ii) も同様。

行列

行列の積

0 行列の性質

(i) $A + 0 = 0 + A = A$

(ii) $A0 = 0, \ \ 0A = 0$

行列の演算の性質は実数の演算の性質によく似ている。ただし

$AB = BA$ とは限らない

$AB = 0$ でも, $A = 0$ または $B = 0$ とは限らない

行列
転置行列

転置行列の定義

$m \times n$ 行列 A に対してその行と列を入れ替えてできる $n \times m$ 行列を A の**転置行列**といい ${}^tA$ で表す。

A の (i, j) 成分 $= {}^tA$ の (j, i) 成分

と言ってもよい。

行列
転置行列

転置行列の性質

A, B : 行列

(I) ${}^t({}^tA) = A$

(II) ${}^t(kA) = k{}^tA$

(III) ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

(IV) ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

[(IV) の確かめ] 行列 X の (i,j) 成分を X_{ij} と書くことにする。$({}^tX)_{ij} = X_{ji}$ だから

$$\begin{aligned}({}^tB{}^tA)_{ij} &= \sum_k ({}^tB)_{ik}({}^tA)_{kj} = \sum_k B_{ki}A_{jk} = \sum_k A_{jk}B_{ki} \\ &= (AB)_{ji} = ({}^t(AB))_{ij}\end{aligned}$$

行列

対称行列・交代行列

対称行列・交代行列の定義

正方行列 A が **対称行列** $\Leftrightarrow$ $A = {}^tA$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = a_{ji}$

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

正方行列 A が **交代行列** $\Leftrightarrow$ $A = -{}^tA$ $\Leftrightarrow$ $a_{ij} = -a_{ji}$

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

A：正方行列 のとき $\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ は対称行列 $\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ は交代行列

だから正方行列は 対称行列 $+$ 交代行列 の形に分解できる。