本日やること

1. 行列
    - 行列の定義
    - 行列の和・スカラー倍
    - 行列の積

行列

行列の定義

行列の定義

行列 とは

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\\ 4 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix},\cdots$$

のように数を長方形に並べたもの

成分：行列を作っている数

行：横に並んだ成分

列：縦に並んだ成分

行列

行列の定義

行列の表示

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} :$$

m 行 n 列の行列,
または $m \times n$ 行列 という。

i 行 j 列の成分を (i,j) 成分 といい a_{ij} で表す。

第 i 行, 第 j 列

a_{ij}

i, j を添字 (suffix) という。
左の添字は行番号, 右の添字は列番号を表す。

行列

行列の定義

[例]

$(a_1 \cdots a_n)$: n 次行ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$: n 次列ベクトル

も行列の一種と考える

行列

行列の定義

[特別な行列：$\boldsymbol{O}$ 行列]

すべての成分が 0 である行列

$$\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

を $\boldsymbol{O}$ (ゼロ) 行列という。

行列
行列の定義

[特別な行列：正方行列]　行の数 $=$ 列の数 $= n$ である行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\ :$$

を n 次正方行列という。とくに対角成分以外すべて 0 であるとき

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\ :\ n\ \text{次対角行列}$$

さらに対角成分がすべて 1 であるとき

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\ :\ n\ \text{次単位行列}\quad \boldsymbol{E}\ \text{で表す。}$$

行列

行列の和・スカラー倍

行列の和・スカラー倍

[和]

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

同じ型の行列どうしでないとたし算できない

[スカラー倍]

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \qquad k：実数$$

ベクトルの和・スカラー倍と同じ考え方だから同じ性質を持つ

行列

復習：ベクトルの内積の成分表示

復習：ベクトルの内積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2),\ \vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2) \ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$　平面の場合

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3) \ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$　空間の場合

行列

行列の積

行列の積：行ベクトル × 列ベクトルの場合

$$(a_1\ a_2 \cdots a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \left(= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)$$

と定める。

次数が同じでないと定義できない

ベクトルの内積と同じである

行列
行列の積

行列の積：一般の場合

$l \times m$ 型行列と $m \times n$ 型行列の積は $l \times n$ 型行列であり

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1m} \\ & & \\ a_{ij} & \cdots\cdots & a_{im} \\ a_{l1} & \cdots\cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1k} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{mk} & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & c_{1n} \\ & c_{ik} & \\ c_{l1} & & c_{ln} \end{pmatrix}$$

とおくとき

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{im}b_{mk} \left(= \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk} \right) \quad i = 1, \cdots, l, \quad k = 1, \cdots, n$$

で定める。c_{ij} は第 i 行ベクトルと第 j 列ベクトルの積である。