電気のための線形代数 A 演習問題 No.7 解答

1. (1) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}$ とするとき $3X+2A=B$ となる行列 X を求めよ。

未知数 A,X,B の 1 次方程式と同じ計算で

$$X=\frac{1}{3}(B-2A)=\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}2&3\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\0&3\end{pmatrix}$$

(2) $C=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}$ とするとき,

$$CD=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$DC=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&-2&-3\\0&1&2\end{pmatrix}$$

2. (1) $\begin{pmatrix}2&-1&1&-2\\4&-2&3&-2\\-6&3&-1&10\\-8&4&-2&12\end{pmatrix}$ の階数を求めよ。

(2) $\begin{cases}2x-y+z-2w=-1\\4x-2y+3z-2w=0\\-6x+3y-z+10w=7\\-8x+4y-2z+12w=8\end{cases}$ の解をすべて求めよ。

(1) と (2) は同じ方法で解けるからまとめてやる。(2) の拡大係数行列にガウスジョルダンの消去法を適用する。

$$\begin{pmatrix}2&-1&1&-2&-1\\4&-2&3&-2&0\\-6&3&-1&10&7\\-8&4&-2&12&8\end{pmatrix}\begin{array}{l}\times(1/2)\\ \\ \\ \\ \end{array}\to\begin{pmatrix}1&-1/2&1/2&-1&-1/2\\4&-2&3&-2&0\\-6&3&-1&10&7\\-8&4&-2&12&8\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \text{第 1 行}\times 4\text{ をひく}\\ \text{第 1 行}\times 6\text{ をたす}\\ \text{第 1 行}\times 8\text{ をたす}\end{array}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1/2&1/2&-1&-1/2\\0&0&1&2&2\\0&0&2&4&4\\0&0&2&4&4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\text{第 2 行}\times(1/2)\text{ をひく}\\ \\ \text{第 2 行}\times 2\text{ をひく}\\ \text{第 2 行}\times 2\text{ をひく}\end{array}\to\begin{pmatrix}1&-1/2&0&-2&-3/2\\0&0&1&2&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

0 でない行が 2 行だから階数は 2 である。また対応する連立方程式は

$$\begin{cases} x - (1/2)y - 2w = -3/2 \\ z + 2w = 2 \end{cases}$$

ここで (たとえば)$y = t$, $w = s$ とおいて

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 2s - \frac{3}{2} \\ y = t \\ z = -2s + 2 \\ w = s \end{cases} \qquad (t,\ s \text{ は任意の実数})$$

がすべての解である。このような解の表示方法は一通りではない。違う表示方法もあり得る。必ず検算しておくこと。

3. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -3/2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

だから

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1/2 & 5/2 \\ 1 & -1/2 & -3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

検算：

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であることを確かめよ。

(2) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + y - z = 1 \\ y + z = t \end{cases}$ の解 (x, y, z) を t で表せ。

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-4t \\ -1+5t \\ 1-3t \end{pmatrix}$$

(3)　(2) の解が $x+y+z=0$ となるように t を決めよ。

$x+y+z=\frac{1}{2}((2-4t)+(-1+5t)+(1-3t))=1-t$

だから

$t=1$