

線形代数A 問題No.3 解答

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ は $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 3 \times 5 - (-5) \times (-3) = 0$ だから正則ではない。

2. (1) $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ とするとき $B^{-1} = \frac{1}{2 \times 5 - (-3) \times (-3)} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ の両辺に左から B^{-1} をかけると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(3) $(y_1, y_2)B = (-1, 2)$ の両辺に右から B^{-1} をかけると

$$(y_1, y_2) = (-1, 2)B^{-1} = (-1, 2) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = (1, 1)$$

3. (1) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ の逆行列をつくれ。

$$C^{-1} = \frac{1}{1 \times 3 - 2 \times 4} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(2) $CC^{-1} = E$ であることを確認せよ。

$$CC^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

(途中の計算をちゃんとやること)

(3) $C^{-1}C = E$ であることを確認せよ。

$$C^{-1}C = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

(途中の計算をちゃんとやること)

4. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & a \end{pmatrix}$ が正則になる条件を求め, 逆行列を計算せよ。

$5a - 2 \times 10 \neq 0$ 即ち $a \neq 4$ のとき正則.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 10 & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5(a-4)} \begin{pmatrix} a & -2 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

5. $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ となる X を求めよ.

両辺に右から $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ をかけると

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$