電気のための線形代数A
演習問題No.2 解答

学生番号

1. 次の行列の積を計算せよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2+(-1)\times(-1) & 2\times 4+(-1)\times 1 \\ 3\times 2+5\times(-1) & 3\times 4+5\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 17 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 3+2\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$$

(3)
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4+2\times 2 & 1\times 1+2\times 5 & 1\times 1+2\times 3 \\ 4\times 4+3\times 2 & 4\times 1+3\times 5 & 4\times 1+3\times 3 \\ 3\times 4+1\times 2 & 3\times 1+1\times 5 & 3\times 1+1\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 7 \\ 22 & 19 & 13 \\ 14 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

(5)
$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\times 1+1\times 4+1\times 3 & 4\times 2+1\times 3+1\times 1 \\ 2\times 1+5\times 4+3\times 3 & 2\times 2+5\times 3+3\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 31 & 22 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の積を計算せよ.

(1)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1+0\times 2+3\times 3 & 1\times 4+0\times 5+3\times 6 & 1\times 7+0\times 8+3\times 9 \\ 2\times 1+(-1)\times 2+4\times 3 & 2\times 4+(-1)\times 5+4\times 6 & 2\times 7+(-1)\times 8+4\times 9 \\ 0\times 1+(-2)\times 2+(-5)\times 3 & 0\times 4+(-2)\times 5+(-5)\times 6 & 0\times 7+(-2)\times 8+(-5)\times 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 22 & 34 \\ 12 & 27 & 42 \\ -19 & -40 & -61 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\times1+3\times0 & 1\times3+3\times1 & 1\times2+3\times5 \\ 2\times1+1\times0 & 2\times3+1\times1 & 2\times2+1\times5 \\ -1\times1+3\times0 & -1\times3+3\times1 & -1\times2+3\times5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 17 \\ 2 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, 次の行列の積を計算せよ.

(1) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times3+6\times(-1) & 2\times(-3)+6\times1 \\ 1\times3+3\times(-1) & 1\times(-3)+3\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times2+(-3)\times1 & 3\times6+(-3)\times3 \\ (-1)\times2+1\times1 & (-1)\times6+1\times3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

これが「$AB \neq BA$」, 「$A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$ でも $AB = \mathbf{0}$」である行列の例である。

4. (1) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる行列 X は (1) より

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

5. 次の行列の積を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

単位行列の重要な性質である。

6. (1) 次の行列の積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 - a_2b_2 & a_1b_2 + a_2b_1 \\ -(a_1b_2 + a_2b_1) & a_1b_1 - a_2b_2 \end{pmatrix}$$

(2) 次の複素数の積を計算せよ。

$(a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2) = a_1b_1 - a_2b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

(3) (1) と (2) を比較せよ。

複素数 $(a_1 + ia_2)$ に対して $F(a_1 + ia_2) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ と定めると，複素数 $a_1 + ia_2$, $b_1 + ib_2$ に対して

$$F((a_1 + ia_2)(b_1 + ib_2)) = F(a_1 + ia_2)F(b_1 + ib_2)$$

という性質を持つ。さらに

$$F((a_1 + ia_2) + (b_1 + ib_2)) = F(a_1 + ia_2) + F(b_1 + ib_2)$$

も成り立つ。この意味で複素数 $a_1 + ia_2$ と行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ は同一視できる

7. $\boldsymbol{A}$ が正方行列であるとき

$\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ は対称行列　　$\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ は交代行列

であることを確かめよ。

$${}^t\!\left(\frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA + {}^{tt}A\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$$

だから $\dfrac{1}{2}\left(A + {}^tA\right)$ は対称行列。

$${}^t\!\left(\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA - {}^{tt}A\right) = \frac{1}{2}\left({}^tA - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$$

だから $\dfrac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$ は交代行列。