環境基礎解析学II復習　解説

問題 1. 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ.

(1) $f(x,y)=x^3-2x^2y-3y^2$ のとき。青字を定数と見なして () の外に出すと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x^3-2x^2y-3y^2)_x = (x^3)_x-(2x^2y)_x-(3y^2)_x \\ &= (x^3)_x - 2y(x^2)_x - 3y^2(1)_x = 3x^2-2y(2x)-0 = 3x^2-4xy \\ f_y(x,y) &= (x^3-2x^2y-3y^2)_y = (x^3)_y-(2x^2y)_y-(3y^2)_y \\ &= x^3(1)_y - 2x^2(y)_y - 3(y^2)_y = 0-2x^2-3(2y) = -2x^2-6y \end{aligned}$$

(2) $f(x,y)=\cos(x-3y+2)$

$x-3y+2=t$ とおき合成関数の微分法を使う。$\cos(1), -\sin(1)$ のように ( ) の中を微分するのは誤り

$f_x(x,y)=(\cos(x-3y+2))_x=(\cos(t))_x$

ここで合成関数の微分法により

$$=(\cos(t))_t\times t_x=(\cos(t))_t\times(x-3y+2)_x=-\sin(t)\times 1=-\sin(x-3y+2)$$

$f_y(x,y)=(\cos(x-3y+2))_y=(\cos(t))_y$

ここで合成関数の微分法により

$$=(\cos(t))_t\times t_y=(\cos(t))_t\times(x-3y+2)_y=-\sin(t)\times(-3)=3\sin(x-3y+2)$$

(3) $f(x,y)=x\cos y-y\sin y+\sin(xy)$

$xy=t$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

$$\begin{aligned} (\sin(xy))_x &= (\sin(t))_x = (\sin(t))_t\times t_x \\ &= (\sin(t))_t\times(xy)_x = \cos(t)\times y = y\cos(xy) \\ (\sin(xy))_y &= (\sin(t))_y = (\sin(t))_t\times t_y \\ &= (\sin(t))_t\times(xy)_y = \cos(t)\times x = x\cos(xy) \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x\cos y)_x-(y\sin y)_x+(\sin(xy))_x \\ &= (x)_x\cos y - y\sin y(1)_x + (\sin t)_t\times t_x \\ &= \cos y + y\cos(xy) \\ f_y(x,y) &= (x\cos y)_y-(y\sin y)_y+(\sin(xy))_y \end{aligned}$$

積の微分法を使って

$$
\begin{aligned}
&= x(\cos y)_y - (y)_y \sin y - y(\sin y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\
&= -x\sin y - \sin y - y\cos y + x\cos(xy)
\end{aligned}
$$

(4) $f(x, y) = e^{3xy}\cos(x - 3y + 2)$

$3xy = t$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

$$
\begin{aligned}
(e^{3xy})_x &= (e^t)_x = (e^t)_t \times t_x \\
&= (e^t)_t \times (3xy)_x = e^t \times 3y = 3ye^{3xy} \\
(e^{3xy})_y &= 3xe^{3xy}
\end{aligned}
$$

$x - 3y + 2 = t$ とおいて合成関数の微分法をつかうと

$$
\begin{aligned}
(\cos(x - 3y + 2))_x &= (\cos t)_x = (\cos t)_t \times t_x \\
&= (\cos t)_t \times (x - 3y + 2)_x = -\sin t \times 1 = -\sin(x - 3y + 2) \\
(\cos(x - 3y + 2))_y &= (\cos t)_y = (\cos t)_t \times t_y \\
&= (\cos t)_t \times (x - 3y + 2)_y = -\sin t \times (-3) = 3\sin(x - 3y + 2)
\end{aligned}
$$

だから積の微分法を使って

$$
\begin{aligned}
(e^{3xy}\cos(x - 3y + 2))_x &= (e^{3xy})_x \cos(x - 3y + 2) + e^{3xy}(\cos(x - 3y + 2))_x \\
&= 3ye^{3xy}\cos(x - 3y + 2) + e^{3xy} \times (-\sin(x - 3y + 2)) \\
&= 3ye^{3xy}\cos(x - 3y + 2) - e^{3xy}\sin(x - 3y + 2) \\
(e^{3xy}\cos(x - 3y + 2))_y &= (e^{3xy})_y \cos(x - 3y + 2) + e^{3xy}(\cos(x - 3y + 2))_y \\
&= 3xe^{3xy}\cos(x - 3y + 2) + e^{3xy} \times (3\sin(x - 3y + 2)) \\
&= 3xe^{3xy}\cos(x - 3y + 2) + 3e^{3xy}\sin(x - 3y + 2)
\end{aligned}
$$

2. 関数 $f(x, y) = \sqrt{4 - 2x^2 - y^2}$ について次のものを求めよ.

(1) $f(1, 1) = \sqrt{4 - 2 - 1} = 1$

(2) $f_x(x, y)$

$t = 4 - 2x^2 - y^2$ とおくと，$f(x, y) = \sqrt{t}$ だから合成関数の微分法により

$$
\begin{aligned}
f_x(x, y) &= (\sqrt{t})_x = (\sqrt{t})_t \times t_x = (\sqrt{t})_t(4 - 2x^2 - y^2)_x \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (-4x) = \frac{-2x}{\sqrt{4 - 2x^2 - y^2}}
\end{aligned}
$$

(3) $f_y(x,y)$

同様に

$$f_y(x,y) = (\sqrt{t})_y = (\sqrt{t})_t \times t_y = (\sqrt{t})_t(4-2x^2-y^2)_y$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$$

(4) $f_x(1,1)$

$$f_x(x,y) = \frac{-2x}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$$

だから

$$f_x(1,1) = \frac{-2}{\sqrt{4-2-1}} = -2$$

(5) $f_y(1,1)$

$$f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{4-2x^2-y^2}}$$

だから

$$f_x(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{4-2-1}} = -1$$

(6) この関数の $x=1,\ y=1$ に対応する点における接平面の方程式.

$z=f(x,y)$ のグラフの，点 $\mathrm{A}'(a,b,f(a,b))$ における**接平面**は

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \cdots (\star)$$

(第 2 回のスライドを見よ)

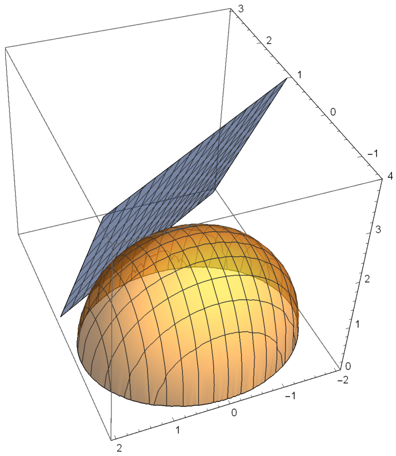
いま, $(a,b)=(1,1)$, $f(1,1)=1$, $f_x(1,1)=-2$, $f_y(1,1)=-1$,

だから

$$z-1 = (-2)(x-1) + (-1)(y-1)$$

整理して

$$z = -2x - y + 4$$



```
G = Plot3D[{Sqrt[4 - 2 x^2 - y^2], -2 x - y + 4},
    {x, -2, 3}, {y, -2, 2},
     PlotRange -> {0, 4}, BoxRatios -> {5, 4, 4},
     AspectRatio -> Automatic, ClippingStyle -> None,
     PlotStyle -> Opacity[0.6]]
```

3. 演習問題第 3 回を見よ。

4. $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3y^2$ について次のものを求めよ.

(1) $f_x(x,y) = 3x^2 + 6y$

(2) $f_y(x,y) = 6x + 6y$

(3) $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ をみたす点 (a,b).

$$\begin{cases} f_x(a,b) = 3a^2 + 6b = 0 \\ f_y(a,b) = 6a + 6b = 0 \end{cases} \quad \cdots (\star)$$

をといて $(a,b) = (0,0)$ または $(a,b) = (2,-2)$. $(\star)$ は (a,b) で極値をとるための必要条件である。

(4) $f_{xx}(x,y) = 6x$

(5) $f_{xy}(x,y) = 6$

(6) $f_{yy}(x,y) = 6$

(7) (1) で求めた (a,b) (2 つある！) に対して

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6a & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 36(a-1) \quad \text{だから}$$

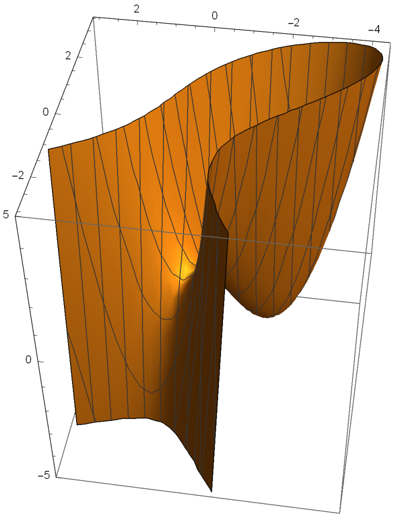
$(a,b)=(0,0)$ のとき $D=-36<0$

$(a,b)=(2,-2)$ のとき $D=36>0$

(8) (1) より $(a,b)=(0,0)$ または $(a,b)=(2,-2)$ 以外では極値をとらない。

$(a,b)=(0,0)$ のとき $D<0$ だから極値をとらない。（第 6 回のスライドを見よ）

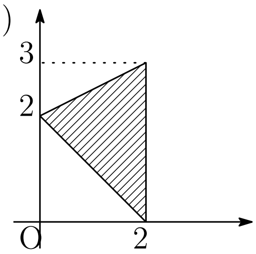
$(a,b)=(2,-2)$ のとき $D>0$, $f_{xx}(2,-2)=12>0$ だから極小となる。極小値は $f(2,-2)=-4$.



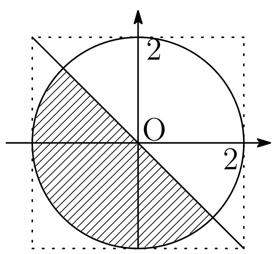

```
Plot3D[x^3 + 6 x y + 3 y^2, {x, -3, 5}, {y, -5, 3},
 PlotRange -> {-5, 5}, ClippingStyle -> None,
 BoxRatios -> {8, 8, 10}]
```

5. 次の領域を $\{(x,y)\,;\, x, y \text{ の不等式}\}$ の形に書き表せ. ただしこの領域は境界を含むものとする.

(1)



(2)



(1) $\left\{(x,y)\middle| y \leqq \dfrac{x}{2}+2, y \geqq -x+2, x \leqq 2\right\}$

$$= \left\{(x,y)\middle| 0 \leqq x \leqq 2, -x+2 \leqq y \leqq \frac{x}{2}+2\right\}$$

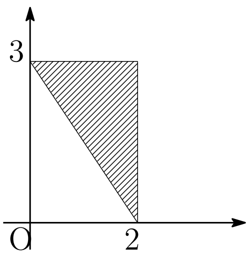
$= \{(x,y)|\ 0 \leqq y \leqq 2, -y+2 \leqq x \leqq 2\} \cup \{(x,y)|2 \leqq y \leqq 3, 2y-4 \leqq x \leqq 2\}$

(2) $\{(x,y)|x^2+y^2 \leqq 4, x+y \leqq 0\}$

6. (1) 平面の閉領域

$D = \{(x,y)\,;\, x \leqq 2, y \leqq 3, 3x+2y \geqq 6\,\}$

を図示せよ.



(2) D を

$\{(x,y)\,;\, a \leqq x \leqq b, \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\,\}$

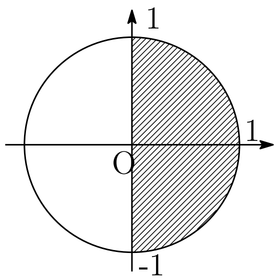
の形 (縦線集合表示) に書き表せ. ただし a, b は定数, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ は x の関数である.

$$D = \left\{(x,y)\middle|0 \leqq x \leqq 2, -\frac{3}{2}x+3 \leqq y \leqq 3\right\}$$

(3) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (-x+2y)\,dxdy$ の値を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left(\int_{-\frac{3}{2}x+3}^{3} (-x+2y)dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left[-xy + y^2 \right]_{y=-\frac{3}{2}x+3}^{y=3} dx \\
&= \int_0^2 \left\{ -3x + 9 - \left(-x\left(-\frac{3}{2}x + 3 \right) + \left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9 \right) \right) \right\} dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{15}{4}x^2 + 9x \right) dx \\
&= \left[-\frac{5}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^2 \\
&= -10 + 18 = 8
\end{aligned}
$$

7. (1) 平面の閉領域 $D = \{(x,y)\,;\, x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0\}$ を図示せよ.



(2) 2 重積分 $\displaystyle\iint_D (1-(x^2+y^2))\,dxdy$ の値を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)r\,drd\theta \\
&= \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$