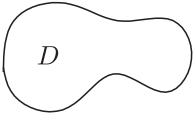
本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 平面図形の面積
   - 立体の体積

積分法の応用

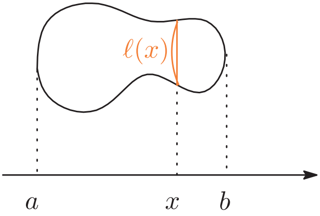
平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



(i)　面積を持つ閉領域 D の面積 S は

$$S = \iint_D dxdy$$



(ii)　D を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. $\ell(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

$$S = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

積分法の応用

平面図形の面積

[確かめ] (i) は省略。 (ii) は 1 年生の時やったのでそれを見てください。

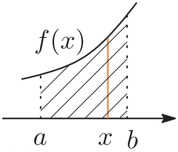
積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x)$, $g(x)$: 連続,　S : 斜線部分の面積

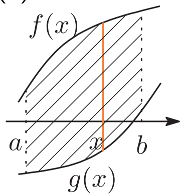
(i)



区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq 0$ であるとき, $\ell(x) = f(x)$ だから

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)



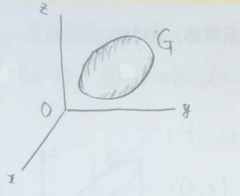
区間 $[a, b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であるとき, $\ell(x) = f(x) - g(x)$ だから

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積



G：体積を持つ有界閉領域

のとき体積 $V(G)$ は

$$V(G) = \iiint_G dxdydz$$

具体的に計算するための方法

$\Rightarrow$ 串刺法

$\Rightarrow$ 輪切法

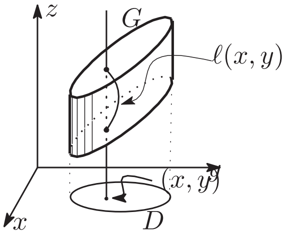
重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（串刺法）

(i) $D=\{(x,y,z)|\varphi_1(x,y)\leqq z\leqq\varphi_2(x,y),\ (x,y)\in D\}$ のとき

$$V(G)=\iint_D(\varphi_2(x,y)-\varphi_1(x,y))\,dxdy$$



(ii) さらに一般に

G：体積を持つ有界閉領域

D ： G の x,y 平面への正射影

$\ell(x,y)$：G の串刺の長さ

とするときは

$$V(G)=\iint_D\ell(x,y)\,dxdy$$

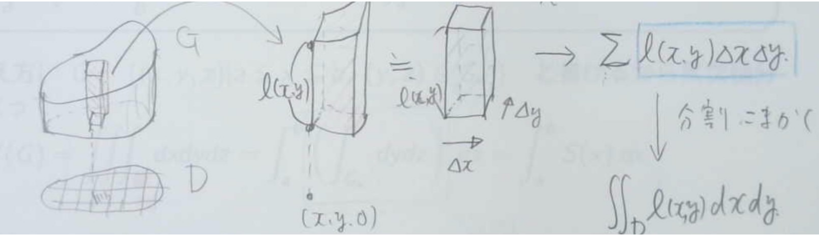
重積分の応用

平面図形の面積

[考え方] (i) は重積分の性質と累次積分による。

$$V(G) = \iiint_G dxdydz = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz \right) dxdy$$
$$= \iint_D (\varphi_2(x,y) - \varphi_1(x,y))\, dxdy$$

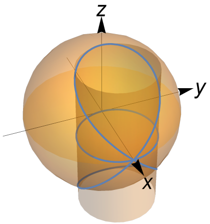
(ii) は 直方体近似



重積分の応用

立体図形の体積

[例題]



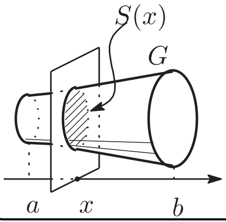
$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq x\}$$

重積分の応用

立体図形の体積

立体図形の体積（輪切法）



G に属する点の x 座標は a から b まで動き，点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った断面 G_x の面積は $S(x)$ であるとするとき，

$$V(G) = \int_a^b S(x)\,dx$$

[考え方]　1 年生のときにやった。