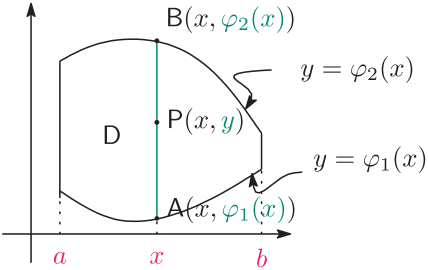
本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
   - 平面の領域
     - 縦線集合・横線集合
   - 2 重積分
   - 累次積分
   - 置換積分法
     - 極座標の場合
     - 一般の変数変換の場合

平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ： 連続関数のとき

$$\begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \end{cases}$$

は閉領域を決める。

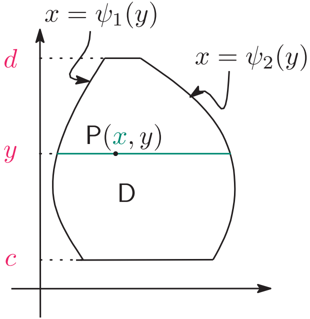
$$D = \{(x, y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

のような表示法を「縦線集合による表示」という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

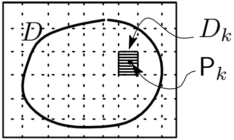
のような表示法を「横線集合による表示」という。

二重積分

定義

2 重積分の定義

D : 面積をもつ有界閉領域
$f(x, y)$: D 上で定義された関数
$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$: D の分割
$\mathrm{P}_k \in D_k,\ k = 1, \ldots, n$



$f(x, y)$ は D 上で積分可能 $\Leftrightarrow$

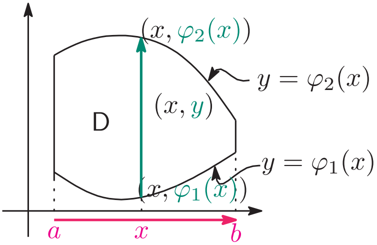
$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k) m(D_k) \quad (\mathcal{P}, \{\mathrm{P}_k\} \text{ のとりかたによらず存在})$$

この極限値 $= \displaystyle\iint_D f(x, y)\, dxdy$, $f(x, y)$ の D 上の 2 重積分と呼ぶ

累次積分

定義

累次積分その 1



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 連続関数

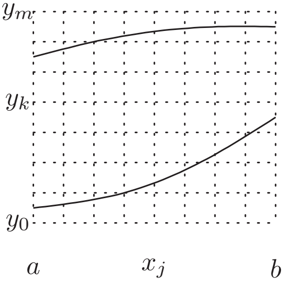
$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$　縦線集合で表示

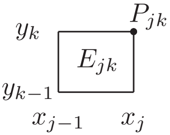
$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

累次積分

証明

[確かめ]　長方形分割で考えてよい。



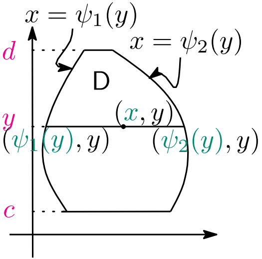


$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &\fallingdotseq \sum_{j,k} f(P_{jk}) m(E_{jk}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k} f(x_j, y_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \sum_{j=0}^{n} \left(\int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y) dy \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \text{右辺}
\end{aligned}
$$

累次積分

定義

累次積分その 2



$\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$: y の連続関数

$$D=\{(x,y)\mid c\leqq y\leqq d,\ \psi_1(y)\leqq x\leqq\psi_2(y)\ \}$$

横線集合で表示

$$\Rightarrow\quad\iint_D f(x,y)\,dxdy=\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\,dx\right)\,dy$$

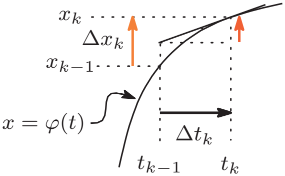
置換積分法

復習：定積分の場合

復習：定積分の置換積分

$$x = \varphi(t) \;\Rightarrow\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\frac{dx}{dt}\,dt$$

[確かめ]



$\displaystyle \lim \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ だから $\displaystyle \Delta x \fallingdotseq \frac{dx}{dt}\Delta t$

$$\sum_k f(x_k)\Delta x_k \fallingdotseq \sum_k f(\varphi(t_k))\frac{dx}{dt}\Delta t_k$$

$\downarrow$ 左辺　　$\downarrow$ 右辺

置換積分法

極座標変換の場合

極座標変換による置換積分法

D：面積をもつ有界閉領域　$f(x,y)$：連続関数　とするとき

$$(\star)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

ただし

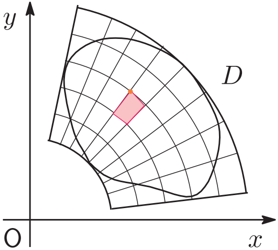
$$\Omega = \{\,(r,\theta)\,;\ r \geqq 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi\ \ (x,y) \in D\}$$

$:(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D$ となるような (r,θ) の集合

置換積分法

極座標変換の場合

[考え方]：D を扇形分割する。



.

$$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\ ;\ r_{j-1} \leqq r \leqq r_j, \theta_{k-1} \leqq \theta \leqq \theta_k\}$$

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1},$$

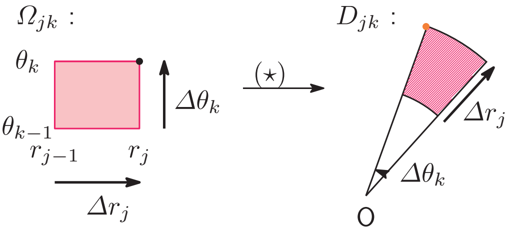
$$\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1},$$

$$\mathrm{P}_{jk}(r_j\cos\theta_k, r_j\sin\theta_k) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, m$$

置換積分法

極座標変換の場合



$$m(D_{jk}) = r_j \Delta r_j \Delta\theta_k - \frac{1}{2}(\Delta r_j)^2 \Delta\theta_k \fallingdotseq r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

$$\sum_{j,k} f(\mathsf{P}_{jk})\, m(D_{jk}) \fallingdotseq \sum_{j,k} f(r_j \cos\theta_k, r_j \sin\theta_k)\, r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

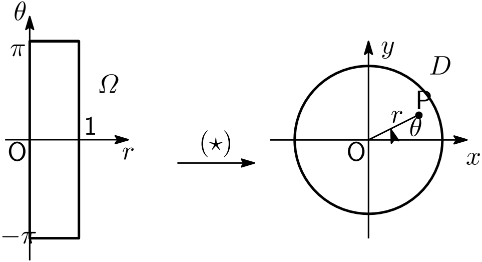
$\downarrow$ 左辺　　　$\downarrow$ 右辺

置換積分法

例題 9.4.1

$$I = \iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy \quad D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

[解]



極座標変換　$(\star)$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

により

$\mathrm{P}(x, y) \in D \ \Leftrightarrow\ 0 \leqq r \leqq 1$ より

$$\Omega = \{(r, \theta);\ 0 \leqq r \leqq 1,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$$

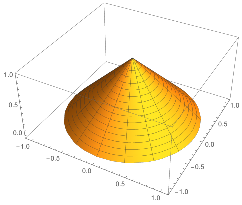
$$1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$ だから

置換積分法

例題 9.4.1

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} (1-r)\, r dr d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 (1-r) r dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6}\, d\theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

である. □



置換積分法

一般の変数変換の場合

一般の変数変換による置換積分法

D : 面積をもつ有界閉領域　$f(x,y)$: 連続関数　とするとき

$$(\star)\ \begin{cases} x=\varphi(u,v) & \text{連続微分可能} \\ y=\psi(u,v) & \text{連続微分可能} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Omega f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,|J(u,v)|dudv$$

ただし

$$\Omega = \{\,(u,v)\,;(\varphi(u,v),\psi(u,v))\in D\}$$

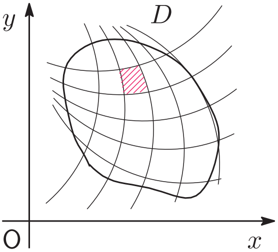
D と Ω は $(\star)$ が定める写像で 1 対 1 対応する

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$: ヤコビアン (Jacobian)

置換積分法

一般の変数変換の場合

[考え方]



$$D_{jk} = \{(\varphi(u,v), \psi(u,v))\ ;\ u_{j-1} \leqq u \leqq u_j, v_{k-1} \leqq v \leqq \boldsymbol{v}_k\}$$

$$\Delta u_j = u_j - u_{j-1},$$

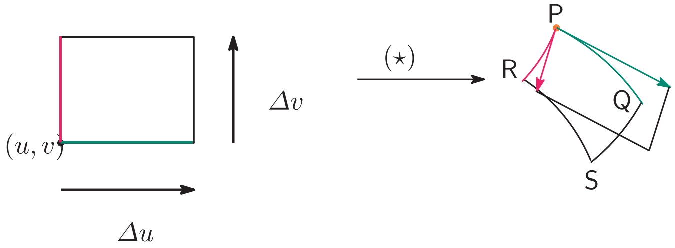
$$\Delta v_k = v_k - v_{k-1},$$

$$\mathrm{P}_{jk}(\varphi(u_j, v_k), \psi(u_j, v_k)) \in D_{jk}$$

$$j = 1, \ldots, n,\ \ k = 1, \ldots, m$$

置換積分法

一般の変数変換の場合

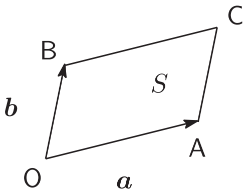


$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= (\varphi(u+\Delta u_j, v) - \varphi(u, v), \psi(u+\Delta u_j, v) - \psi(u, v)) \\
&\fallingdotseq (\varphi_u(u, v)\Delta u_j, \psi_u(u, v)\Delta u_j) = (\varphi_u(u, v), \psi_u(u, v))\Delta u_j \\
\overrightarrow{\mathrm{PR}} &= (\varphi(u+\Delta v_k, v) - \varphi(u, v), \psi(u+\Delta v_k, v) - \psi(u, v)) \\
&\fallingdotseq (\varphi_v(u, v)\Delta v_k, \psi_v(u, v)\Delta v_k) = (\varphi_v(u, v), \psi_v(u, v))\Delta v_k
\end{aligned}
$$

置換積分法

一般の変数変換の場合

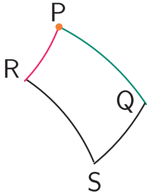
[考え方]　ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で張られる平行四辺形の面積 S は



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad S = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が右手系のとき} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \text{ が左手系のとき} \end{cases}$$

だから



$$\fallingdotseq \left(\begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \text{の絶対値} \right) \Delta u_j \Delta v_k$$