本日やること

あと 3 回でやること
2 変数関数の重積分法
　平面の領域と境界
　重積分
　累次積分と積分の変数変換
　(面積・体積)

本日やること

1. 2 変数関数の重積分法
    - 平面の領域
        - 領域と境界
        - 縦線集合・横線集合
    - 2 重積分
        - 定義
    - 2 重積分の基本的性質
    - 累次積分

平面の領域

領域と境界

1 変数関数の定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

2 変数関数の重積分

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \quad (D \subset \mathbb{R}^2)$$

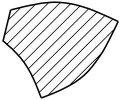
この D として許される集合は?

平面の領域

領域と境界

図形：三角形, 長方形, 円, · · ·

領域：「平面の, 連続な曲線で囲まれた点の集合で, 曲線上の点を含まず, 1 つにつながっているもの」



境界：領域を囲む曲線

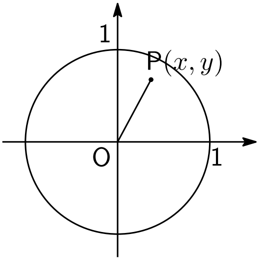
閉領域：領域と境界をあわせたもの

有界領域：適当な円に含まれる領域

平面の領域

例

[例]　単位円の内部



P(x,y)：円内の任意の点

OP$=\sqrt{x^2+y^2}$　だから

P(x,y) が円周上にある

$\Leftrightarrow$　OP$=1$　$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2=1$

P(x,y) が円の内部にある

$\Leftrightarrow$　OP<1　$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2<1$

だから

$D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$：原点中心半径 1 の円の内部である領域

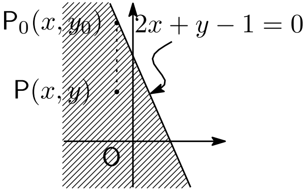
$G=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$：D の境界

と表される。

平面の領域

例

[例]　直線 ℓ : $2x+y-1=0$ の下側である領域



$\mathrm{P}(x,y)$: この領域内の任意の点

$\mathrm{P}_0(x,y_0)$: P の上下方向にある ℓ 上の点

とすると

$$y<y_0$$

一方, P_0 が ℓ にある

$$\Leftrightarrow \quad 2x+y_0-1=0$$

だから P が ℓ の下側にある

$$\Leftrightarrow \quad 2x+y-1<(2x+y_0-1=)0$$

以上から

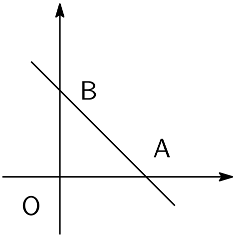
$D=\{(x,y)|2x+y-1<0\}$: 直線 $2x+y-1=0$ の下側にある領域

$G=\{(x,y)|2x+y-1=0\}$: D の境界

平面の領域

例

[例] 原点 O, 点 A$(1,0)$, 点 B$(0,1)$ を頂点とする △OAB を境界とする閉領域 D :



$$
\begin{aligned}
\text{直線 OA の上側} &= \{(x,y) \mid y \geqq 0\}, \\
\text{直線 OB の右側} &= \{(x,y) \mid x \geqq 0\}, \\
\text{直線 AB の下側} &= \{(x,y) \mid x+y \leqq 1\}
\end{aligned}
$$

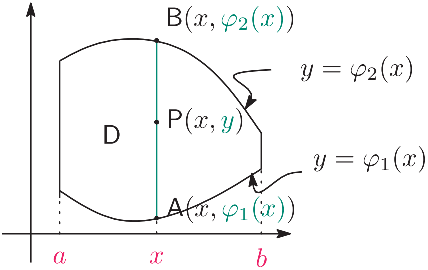
の共通部分であるから

$$
D = \{(x,y) \mid x \geqq 0, y \geqq 0, x+y \leqq 1\}
$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$: 連続関数のとき

$$\begin{cases} a \leqq x \leqq b \\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x) \end{cases}$$

は閉領域を決める。

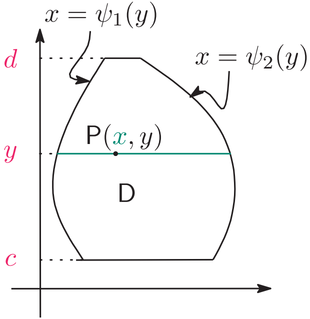
$$D = \{(x,y) \mid a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\ \}$$

のような表示法を「縦線集合による表示」という。

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合



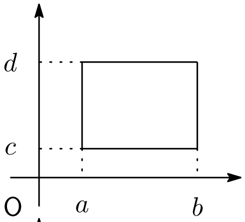
$$D = \{(x, y) \mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\}$$

のような表示法を「横線集合による表示」という。

平面の領域

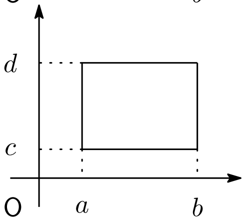
縦線集合・横線集合

例　長方形領域



縦線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$$



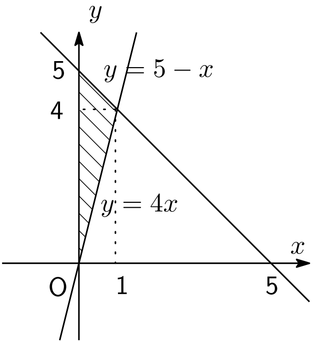
横線集合で表すと

$$D = \{(x, y) \,|\, c \leqq y \leqq d,\ a \leqq x \leqq b\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

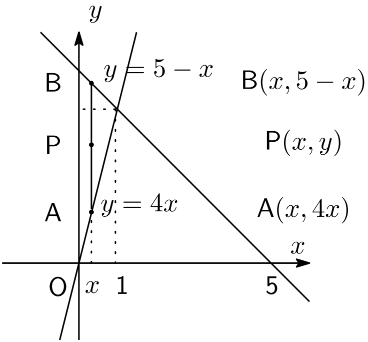
[例題 9.1.2]



平面の領域

縦線集合・横線集合

縦線集合で表すと

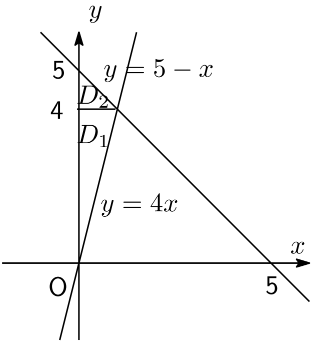


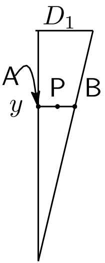
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq 1,\ 4x \leqq y \leqq 5 - x\}$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

横線集合で表すと





$y=4x \Leftrightarrow x=\frac{y}{4}$ に注意して

A$(0,y)$ P(x,y) B$(\frac{y}{4},y)$

$D_1 =$
$\{(x,y)\,|\,0 \leqq y \leqq 4,\ 0 \leqq x \leqq \frac{y}{4}\}$

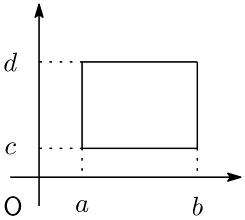
$D_2 = \{(x,y)\,|\,4 \leqq y \leqq 5,\ 0 \leqq x \leqq 5-y\}$

$D = D_1 \cup D_2$

平面の領域

面積

長方形の面積

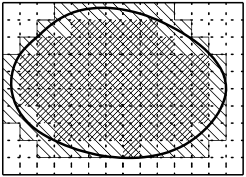


$$S = (b-a)(d-c)$$

平面の領域

縦線集合・横線集合

一般の領域の面積



s : ▨ 完全に含まれる小長方形の面積和

S : ▧ 共通部分のある小長方形の面積和

面積

長方形分割を限りなく細かくするとき

$$\lim(S - s) = 0$$

となるとき, D は面積を持つという。このとき

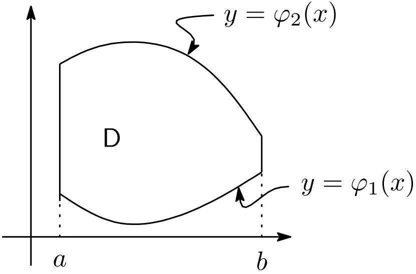
$$\lim S = \lim s$$

となるが, この量を $= m(D)$ とおき D の面積という .

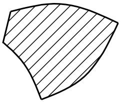
平面の領域

面積

面積を持つ閉領域の例



連続関数のグラフで囲まれた領域

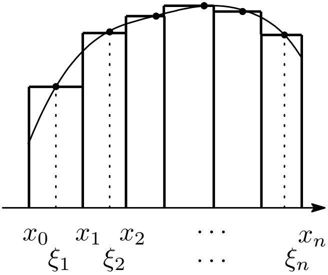


いくつかの接線を持つようになめらかな曲線で囲まれた領域

2 重積分

復習：定積分

復習 $[a, b]$ 上の $f(x)$ の定積分



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$
$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$
$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \Delta x_k$
$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$

二重積分

積分領域の分割

$D \subset \mathbb{R}^2$：面積を持つ有界閉領域

のとき

$\mathcal{P} = \{D_1, \ldots, D_n\}$ が D の分割であるとは,

(i) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$

(ii) 各 D_k は面積をもつ有界閉領域, 境界以外では互いに共通部分をもたない

であること。

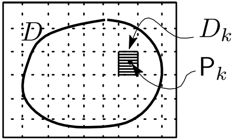
$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\ldots,n} \max\{\mathrm{PQ} \mid \mathrm{P},\ \mathrm{Q} \in D_k\}$

二重積分

定義

2 重積分の定義

D：面積をもつ有界閉領域
$f(x,y)$：D 上で定義された関数
$\mathcal{P}=\{D_1,\dots,D_n\}$: D の分割
$\mathrm{P}_k\in D_k,\ k=1,\dots,n$



$f(x,y)$ は D 上で積分可能 $\Leftrightarrow$

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{P}_k)m(D_k) \quad (\mathcal{P},\{\mathrm{P}_k\}\text{ のとりかたによらず存在})$$

この極限値 $=\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$,　$f(x,y)$ の D 上の 2 重積分と呼ぶ

二重積分

2 重積分の基本的性質

2 重積分の性質

1. 面積をもつ有界閉領域 D 上で連続な 2 変数関数は D で積分可能である.

以後、D は面積を持ち有界閉な領域, 関数は連続とする.

2. (i) $\displaystyle\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

   (ii) $\displaystyle\iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy$ （k は定数とする）

   (iii) D 上で $f(x,y) \leqq g(x,y) \Rightarrow \displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\,dxdy$

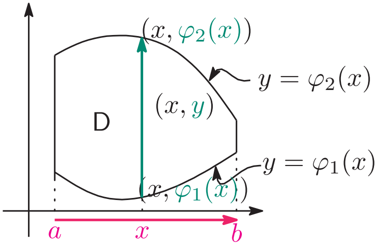
   (iv) $D = D_1 \cup D_2$ で D_1, D_2 が境界以外では共通部分をもたないならば,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

累次積分

定義

累次積分その 1



$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 連続関数

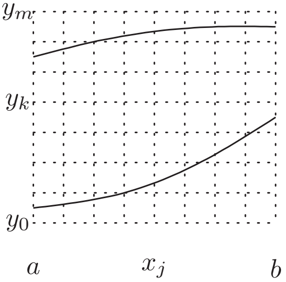
$D = \{(x, y) \,|\, a \leqq x \leqq b,\ \varphi_1(x) \leqq y \leqq \varphi_2(x)\}$ 縦線集合で表示

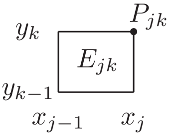
$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

累次積分

証明

[確かめ]　長方形分割で考えてよい。



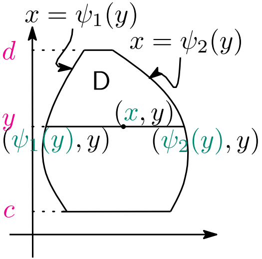


$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{j,k} f(P_{jk})m(E_{jk}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k} f(x_j, y_k)\Delta y_k \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \sum_{j=0}^{n} \left(\int_{\varphi_1(x_j)}^{\varphi_2(x_j)} f(x_j, y)dy \right) \Delta x_j \\
&\fallingdotseq \text{右辺}
\end{aligned}
$$

累次積分

定義

累次積分その 2



$\psi_1(y),\ \psi_2(y)$: y の連続関数

$$D=\{(x,y)\mid c \leqq y \leqq d,\ \psi_1(y) \leqq x \leqq \psi_2(y)\ \}$$

横線集合で表示

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)\,dy$$