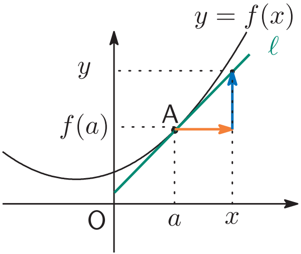
本日やること

1. 2 変数関数
    - 復習：接平面
    - 合成関数の微分法
    - 極座標

2 変数関数
復習：接平面

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



1. $y = f(x)$ のグラフの

   A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾き $= f'(a)$

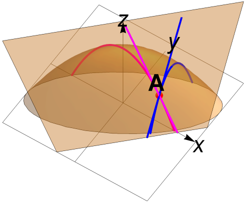
接線の方程式は

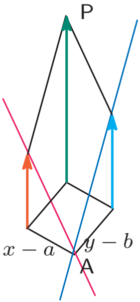
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

2 変数関数

復習：接平面

[2 変数関数の場合]





$z = f(x,y)$ のグラフ上の点 A$(a,b,f(a,b))$

接平面上の点 P(x,y,z)

とすると

A における

x 方向接線の傾き $= f_x(a,b)$,

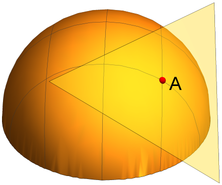
y 方向接線の傾き $= f_y(a,b)$,

だから接平面の方程式は

$$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \quad \cdots (\star)$$

2 変数関数
復習：接平面

[例：上半球面の接平面]



$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \ (= f(x,y) \text{ とおく.})$$
：半径 R の上半球面

A(a,b,c)：上半球面上の点

のとき A における接平面・法ベクトルを計算する。
$R^2 - x^2 - y^2 = t$ とおく。

$$f_x(x,y) = \left(\sqrt{t}\right)_x = \left(\sqrt{t}\right)_t \times t_x$$
$$= (t^{\frac{1}{2}})_t \, (R^2 - x^2 - y^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (-2x)$$
$$= \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$
$$f_y(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

2 変数関数

復習：接平面

したがって ($f(a,b) = \sqrt{R^2 - a^2 - b^2} = c$ を使って)

$$f_x(a,b,c) = -\frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2 - b^2}} = -\frac{a}{c}, \quad \text{同様に} \quad f_y(a,b,c) = -\frac{b}{c}$$

接平面の方程式は $(\star)$ より

$$z - c = -\frac{a}{c}(x-a) - \frac{b}{c}(y-b)$$

整理して $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$ を使うと

$$ax + by + cz = R^2$$

法ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = (f_x(a,b), f_y(a,b), -1) = \left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}, -1\right) = \frac{-1}{c}(a,b,c) = \frac{-1}{c}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

だから半径方向。

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i) $z=g(t)$:微分可能, $t=f(x,y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z=g(f(x,y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "t_x"] & & \\ & t \arrow[r, "z_t"] & z \\ y \arrow[ur, "t_y"'] & & \end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例] $z=\sin(xy)$ のとき $xy=t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y\cos(xy)$$

2 変数関数
合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "z_x"] & \\
t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\
& y \arrow[ur, "z_y"'] &
\end{tikzcd}$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "x_u"] \arrow[ddr, "y_u"'] & x \arrow[dr, "z_x"] & \\
& & z \\
v \arrow[r, "y_v"'] \arrow[uur, "x_v"] & y \arrow[ur, "z_y"'] &
\end{tikzcd}$$

2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]

t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}\Delta x &= \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)\\ \Delta y &= \psi(t+\Delta t) - \psi(t)\\ \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta x & & \\
 & & x \arrow[dr] & & \\
\Delta t & t \arrow[ur] \arrow[dr] & & z & \Delta z \\
 & & y \arrow[ur] & & \\
 & & \Delta y & &
\end{tikzcd}$$

だけ変化する.

Δx, Δy が小さいとき

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\Big) + \Big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\Big)\\ &\fallingdotseq f_x(x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y,\end{aligned}$$

2 変数関数

合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]

この両辺を Δt で割って $\Delta t \to 0$ とすると

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$
$$f_x(x, y + \Delta y) \to f_x(x, y) = z_x,$$

となり, 近似 $\fallingdotseq$ の誤差も $\to 0$ となることが知られているので

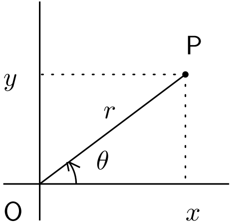
$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

2 変数関数

平面の極座標

平面の極座標



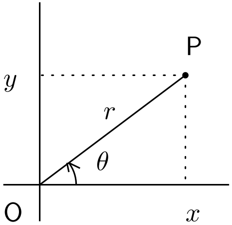
P の直交座標：(x, y)

P の極座標：(r, θ)

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 1



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だから

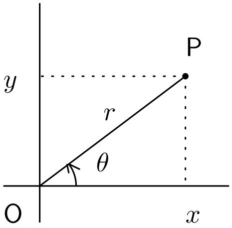
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 2



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

だから

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$