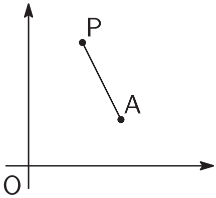
本日やること

1. 2 変数関数
   - 2 変数関数の極限・連続性
   - 復習:偏微分係数・偏導関数
   - 偏微分係数の図形的意味
   - 方向微分
   - 接平面
   - 合成関数の微分法

2 変数関数

2 変数関数の極限・連続性



動点 P(x, y) が定点 A(a, b) に限りなく近づくとは 2 点の距離 AP が限りなく 0 に近づくこと。

$$\mathrm{P} \to \mathrm{A}, \quad (x, y) \to (a, b)$$

などで表す。

PA$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ だから

$$\mathrm{P} \to \mathrm{A} \iff x \to a \text{ かつ } y \to b$$

2 変数関数

2 変数関数の極限・連続性

2 変数関数の極限・連続性の定義

P→A のとき $f(x,y)$ は極限値 α に収束するとは，近づき方によらず，関数 $f(x,y)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくこと。

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \alpha, \quad f(x,y) \to \alpha \ \ (\ (x,y) \to (a,b))$$

などで表す.

関数 $f(x,y)$ が点 A(a,b) で連続であるとは

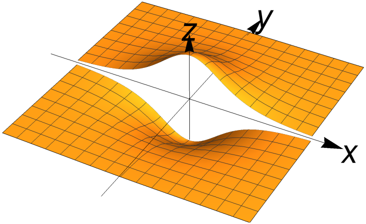
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

であること。定義域の各点で連続であるとき、単に連続であるという。

2 変数関数

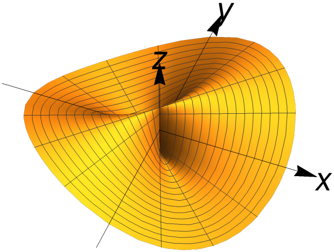
連続でない関数の例

[連続でない関数の例]



$$z = \frac{\mathsf{sign}(y)}{(x^2+y^2+1)^2} \text{ ただし}$$

$$\mathsf{sign}(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \text{ のとき} \\ 0 & y = 0 \text{ のとき} \\ -1 & y < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$



$$z = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

2 変数関数

復習：偏微分係数・偏導関数

[復習：偏微分係数・偏導関数]

2 変数関数 $z = f(x, y)$ の点 A(a, b) における x に関する偏微分係数 $f_x(a, b)$ とは, y を定数 b と見なして $f(x, b)$ を x のみの関数と考えて x で微分して 得られる微分係数。

x に関する偏導関数 $f_x(x, y)$ とは, 各点 (x, y) に (x, y) での偏微分係数を対応させる関数である。

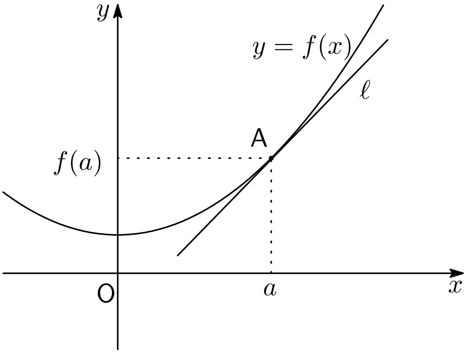
y に関する偏微分係数・偏導関数も同様に定める。

1 変数関数と同じ規則に従って計算できる。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾きは $= f'(a)$

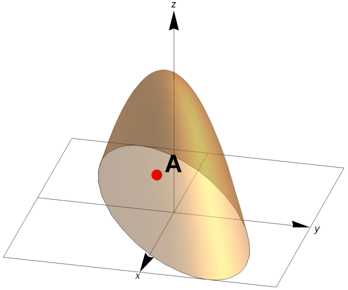
だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f'(a)$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

偏微分係数の図形的意味を $f(x,y) = -x^2 + 2xy - 2y^2 + 2$ の場合で説明する。



$z = f(x,y) \cdots ①$ のグラフは

$$\text{点 P } (x, y, f(x,y)) \quad (x,\ y \text{ は任意の実数})$$

をすべて集めたもの．だからグラフ上の $x = 1$, $y = 0$ である点 A の座標は

$$f(1,0) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 + 2 = 1$$

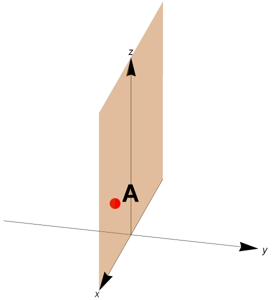
だから

$$\mathrm{A}(1,0,1)$$

$(1,0)$ における x に関する偏微分係数 $f_x(1,0)$ を図形的に調べる。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



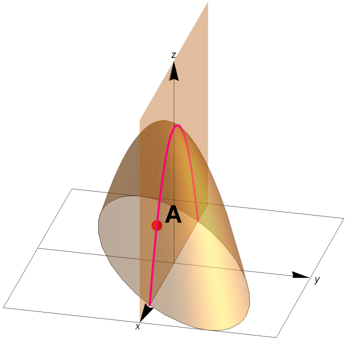
y 座標を 0 に固定した点

$$(x, 0, z),\ (x, z \text{ は任意の実数})$$

をすべて集めたものは, 図のように A を通り y 軸に垂直な平面となる。これを Px とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



①のグラフと平面 Px の共通部分は

$$z = f(x, y), \quad y = 0$$

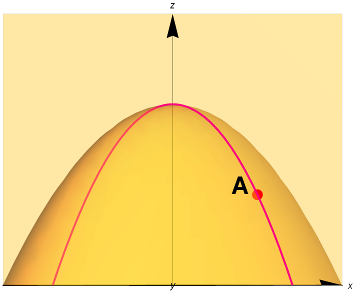
を両方満たすから

$$z = f(x, 0), \quad y = 0, \ (x \text{ は任意の実数})$$

を満たし図のような曲線となる。これを Cx とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



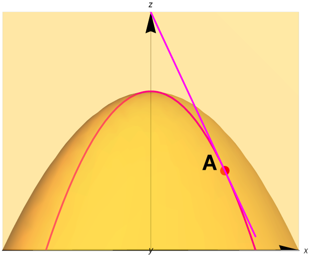
Cx を y 軸の負の方向から眺めると図のようになる。これは xz 平面で 1 変数関数

$$z = f(x, 0) = -x^2 + 2$$

のグラフになっている。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



この曲線 Cx に点 A で接線を引いてみよう。1 変数関数の考え方を使って

接線の傾き

$$= \Big((-x^2+2) \text{ の } x=1 \text{ における微分係数} \Big)$$
$$= (-2x)\big|_{x=1} = -2$$

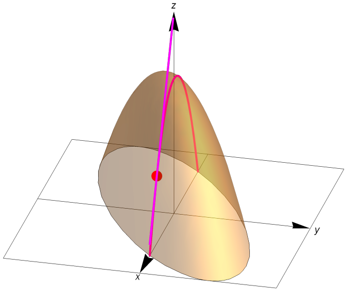
接線の方程式は

$$z = -2(x-1)+1 = -2x+1$$

これを Lx とおく。

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



Cx Lx を空間内で眺めると図のようになる。

Lx を①のグラフの A における x 方向接線とよぶ。

まとめると, x 方向接線の傾きの計算は,

(1) $z = f(x, y)$ に, 「$y = 0$ 代入」

(2) 「x で微分」

(3) 「$x = 1$ 代入」

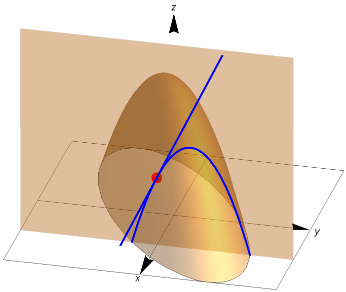
したことになるが, これは x に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$x \text{ 方向接線の傾き} = f_x(1, 0) = -2$$

であることが分かる.

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味



y についても同様に

(1)　$z = f(x, y)$ に，「$x = 1$ 代入」

(2)　「y で微分」

(3)　「$y = 0$ 代入」

すれば y に関する偏微分係数を求めたことになるので

$$y \text{ 方向接線の傾き} = f_y(1, 0) = 2$$

であることが分かる．

2 変数関数

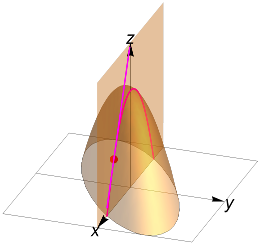
偏微分係数の図形的意味

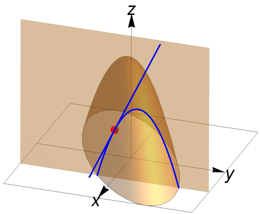
偏微分係数の図形的意味

$f(x, y)$ が偏微分可能であるとき, $z = f(x, y)$ のグラフの曲面において

A$(a, b, f(a, b))$ における x 方向接線の傾き $= f_x(a, b)$,

A$(a, b, f(a, b))$ における y 方向接線の傾き $= f_y(a, b)$.

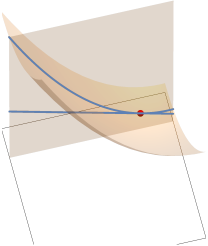




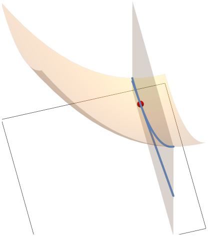
2 変数関数

方向微分

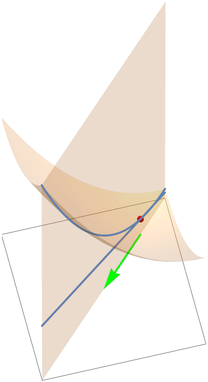
[方向微分] x 軸方向 y 軸方向だけではなくいろいろな方向の微分を考えたい。



x に関する偏微分



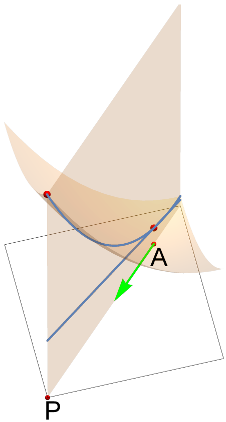
y に関する偏微分



ベクトル $\boldsymbol{u}$ 方向の微分

2 変数関数
方向微分

方向微分係数の定義



$z = f(x,y)$: 2 変数関数
A(a,b) : xy 平面の定点.
$\boldsymbol{u}$: xy 平面の大きさ 1 のベクトル.
動点 P(x,y) を A から $\boldsymbol{u}$ 方向に動かすと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\boldsymbol{u}, \quad s \text{ は実数のパラメータ}$$

と表される.

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{s}$$

が存在するとき $f(x,y)$ の点 A(a,b) における $\boldsymbol{u}$ 方向微分係数と呼ぶ. (ただし, $f(\mathrm{P})$, $f(\mathrm{A})$ はそれぞれ $f(x,y)$, $f(a,b)$ を意味する.)

2 変数関数
方向微分

定理 8.4. 方向微分可能性・方向微分係数の表示

$\boldsymbol{u}$ を大きさ 1 のベクトルとする。

(i) $f(x, y)$ が偏微分可能で，偏導関数が連続ならば点 A(a, b) における $\boldsymbol{u}$ 方向微分係数は存在する。

(ii) $\boldsymbol{u}$ の成分表示を $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ とすると

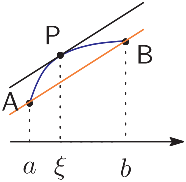
$$\lim_{s \to 0} \frac{f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{A})}{s} = u_1 f_x(a, b) + u_2 f_y(a, b)$$

である.

以下説明する。

2 変数関数
方向微分

復習：Lagrange の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

$$\Rightarrow \ f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (= \text{AB の傾き}),$$
$$a < \xi < b$$

となる ξ がある。

$\xi = a + \theta(b - a)$, $0 < \theta < 1$ のように θ を使って表すこともある。

2 変数関数
方向微分

[定理の確かめ]

$$\frac{f(P)-f(A)}{s} = \frac{f(x,y)-f(a,b)}{s} = \frac{f(x,y)-f(a,y)}{s} + \frac{f(a,y)-f(a,b)}{s}$$

ここで関数 $t \mapsto f(t,y)$ $(a \leqq t \leqq x)$, $t \mapsto f(a,t)$ $(b \leqq t \leqq y)$ にラグランジュの平均値の定理を使うと

$$f(x,y)-f(a,y) = f_x(a+\theta_1(x-a),y)(x-a), \quad 0<\theta_1<1,$$
$$f(a,y)-f(a,b) = f_y(a,b+\theta_2(y-b))(y-b), \quad 0<\theta_2<1$$

を満たす実数 θ_1, θ_2 が存在することがわかる. (θ_1, θ_2 は s に依存して決まる.)

2 変数関数

方向微分

[定理の確かめ (続き)]

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\boldsymbol{u}, \iff (x-a, y-b) = s(u_1, u_2) = (su_1, su_2)$$

だから

$$\frac{f(P)-f(A)}{s} = f_x(a+\theta_1 u_1 s, y)u_1 + f_y(a, b+\theta_2 u_2 s)u_2$$

ここで

$$s \to 0 \ \Rightarrow x \to a, y \to b, (a+\theta_1 u_1 s, y) \to (a,b), (a, b+\theta_2 u_2 s) \to (a,b)$$

であり，f_x，f_y が連続だから

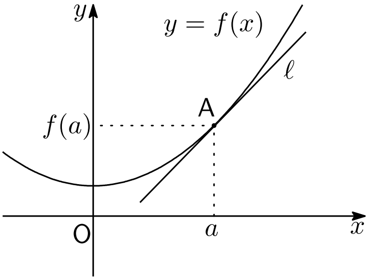
$$f_x(a+\theta_1 u_1 s, y) \to f_x(a,b), f_y(a, b+\theta_2 u_2 s) \to f_y(a,b)$$

以上から

$$\frac{f(P)-f(A)}{s} \to f_x(a,b)u_1 + f_y(a,b)u_2$$

2 変数関数
復習：偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



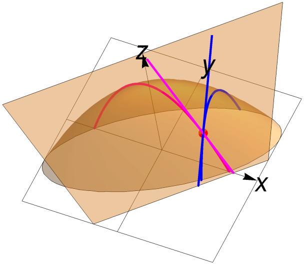
A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾き $= f'(a)$

だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f'(a)$$

では 2 変数関数の場合は？

2 変数関数
接平面



$z=f(x,y)$ のグラフの曲面において，

A$(a,b,f(a,b))$ における x 方向接線，
y 方向接線

を含む平面を作る。この平面の方程式は（第 1 回で説明したことにより）

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \quad \cdots(\star)$$

である。

これは接平面になるか？

2 変数関数

接平面

接平面

関数 $z = f(x, y)$ が xy 平面上の点 A(a, b) で偏微分可能であり，偏導関数が連続であるとき，平面

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \cdots (\star)$$

は曲面 $z = f(x, y)$ の空間の点 A$'(a, b, f(a, b))$ における接平面となる．また，ベクトル

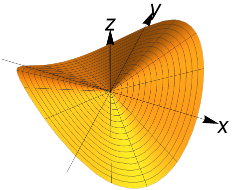
$$\boldsymbol{n} = (f_x(a, b), f_y(a, b), -1)$$

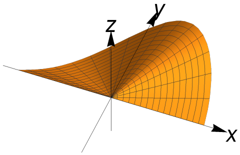
(およびこれに 0 でない数をかけて得られるベクトル) は接平面に垂直であり，これらを曲面 $z = f(x, y)$ の法線ベクトルという．

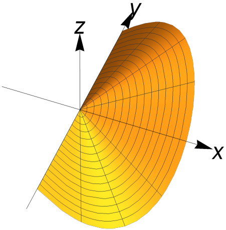
2 変数関数

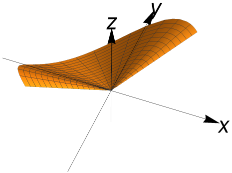
接平面

[偏微分可能であるが接平面を持たない関数の例] $z = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$









2 変数関数

接平面

[確かめ] 平面 $(\star)$ と曲面 $z = f(x, y)$ の任意の方向の方向微分係数が一致することを確かめればよい。

$$g(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

とおくとこの関数のグラフは平面 $(\star)$ になる。$g_x(x, y) = f_x(a, b)$, $g_y(x, y) = f_y(a, b)$ だから $z = g(x, y)$ の A(a, b) における $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ 方向の方向微分係数は

$$\lim_{s \to 0} \frac{g(P) - g(A)}{s} = g_x(a, b)u_1 + g_y(a, b)u_2 = f_x(a, b)u_1 + f_y(a, b)u_2$$

となり，$f(x, y)$ の方向微分係数と一致する。したがって曲面 $z = f(x, y)$ と平面 $(\star)$ はあらゆる方向で接する。

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i) $z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "t_x"] & & \\
& t \arrow[r, "z_t"] & z \\
y \arrow[ur, "t_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例] $z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y \cos(xy)$$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "x_u"] \arrow[dr, "y_u"' near start] & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ & & z \\ v \arrow[r, "y_v"'] \arrow[ur, "x_v" near start] & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]
t が $\varDelta t$ だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}\varDelta x &= \varphi(t+\varDelta t)-\varphi(t)\\ \varDelta y &= \psi(t+\varDelta t)-\psi(t)\\ \varDelta z &= f(x+\varDelta x, y+\varDelta y)-f(x,y)\end{aligned}$$

だけ変化する．ここで Lagrange の平均値の定理を使って方向微分と同様の議論をすると,

$$\begin{aligned}\varDelta z &= \Big(f(x+\varDelta x, y+\varDelta y)-f(x, y+\varDelta y)\Big)+\Big(f(x, y+\varDelta y)-f(x,y)\Big)\\ &= f_x(x+\theta_1\varDelta x, y+\varDelta y)\varDelta x+f_y(x, y+\theta_2\varDelta y)\varDelta y,\\ &\qquad 0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1\end{aligned}$$

となる数 θ_1, θ_2 がある.

2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]
この両辺を $\varDelta t$ で割って $\varDelta t \to 0$ とすると

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$

$$f_x(x+\theta_1 \varDelta x, y+\varDelta y) \to f_x(x,y) = z_x, \qquad f_y(x, y+\theta_2 \varDelta y) \to f_y(x,y) = z_y$$

となるので

$$\frac{\varDelta z}{\varDelta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.