ガイダンス

環境基礎解析学 II

内容
(1) 2 変数関数の偏微分法, 曲面と接平面, 極値問題 (4 回)
(2) 2 変数関数の重積分法 (3 回)

教科書
昨年度の環境基礎解析学 I の教科書を使う。

評価方法
期末試験, 課題

授業資料：Web 上にあげておきます
http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/

本日やること

1. ガイダンス
2. 2 変数関数
   - 2 変数関数とは何か
   - 2 変数関数のグラフ
   - 平面と 1 次関数
3. 偏微分係数・偏導関数
   - 偏微分係数・偏導関数の定義
   - 偏微分係数・偏導関数の計算

2 変数関数

定義

[復習：1 変数の関数 f] とは

実数に対して実数を対応させる働き

$$f : x \mapsto y \quad \text{または} \quad y = f(x)$$

で表す

例： $y = x + 1,$

$y = x^2,$

$y = \sin x,$

2 変数関数

定義

[2 変数の関数 f] とは

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

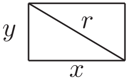
$f\ :\ (x, y) \mapsto z$ または $z = f(x, y)$ で表す。

x, y : 独立変数, z : 従属変数

$D = \{(x, y) | f(x, y)$ が定義される $\}$: 定義域

$f(D) = \{f(x, y) | (x, y) \in D\}$: 値域

例：



周の長さ	$\ell = 2(x + y)$,
面積	$S = xy$,
対角線の長さ	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

で決まる ℓ, S, r は x, y の 2 変数関数

2 変数関数

定義

n 変数の関数 f も同様に考える。

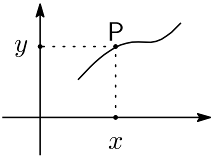
2 変数関数
グラフ

[復習：1 変数関数のグラフ]

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフとは

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

のこと。(D は定義域)



点 P(x, y) がグラフ上にある $\iff$ $y = f(x)$

f が連続関数ならば曲線となる。

2 変数関数

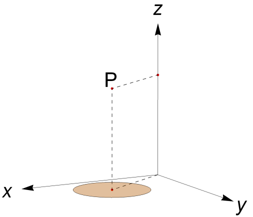
グラフ

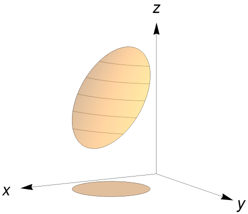
2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \,|\, z = f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

のこと。(D は f の定義域)





P(x, y, z) がグラフ上

$$\Updownarrow$$

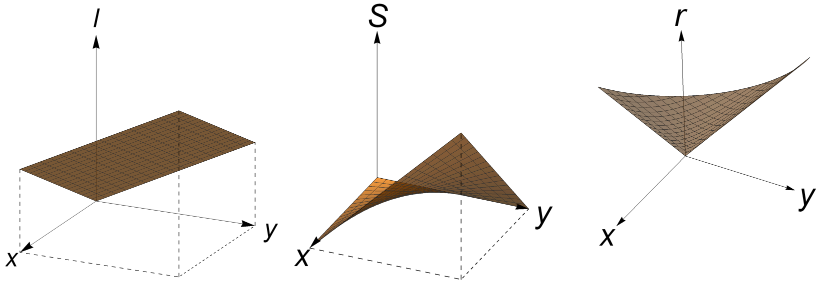
$z = f(x, y)$

多くの場合曲面になる。

2 変数関数
グラフ

[グラフの目的]

1. グラフを用いると関数の値の変化の様子がよく分かる。
2. 図形をある関数のグラフと見ることにより, 図形の性質を関数の計算によって調べることができる。

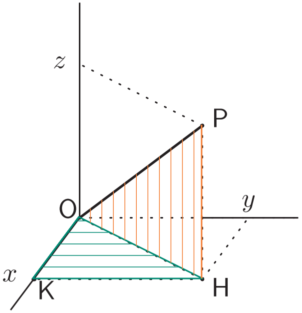


(a) $\ell = \frac{1}{2}(x+y)$　(b) $S = xy$　(c) $r = \sqrt{x^2+y^2}$

2 変数関数

グラフ

[準備：空間の点と原点の距離]



P(x, y, z), H$(x, y, 0)$, K$(x, 0, 0)$ とおく。
△OKH, △OHP に三平方の定理を用いて

$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HP}^2$$
$$\mathrm{OH}^2 = \mathrm{KH}^2 + \mathrm{OK}^2$$

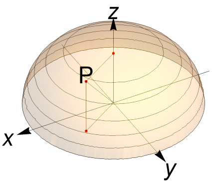
だから

$$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OK}^2 + \mathrm{KH}^2 + \mathrm{HP}^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2$$
$$\mathrm{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2 変数関数

グラフ

[例 8.4]　$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ のグラフをかく。
ただし定義域は $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqq 1\}$



グラフ上の点を P(x,y,z) とおくと

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ だから

$$\iff \quad x^2+y^2+z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

$$\iff \quad \mathrm{OP} = 1,\ z \geqq 0$$

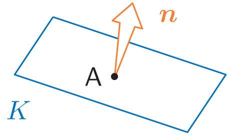
だから P は原点中心半径 1 の球面の上半分の上にある．したがってグラフは原点中心半径 1 の上半球面である。

$(x,y) \in D$ でないと $f(x,y)$ が定義できないことに注意。

2 変数関数

平面と 1 次関数

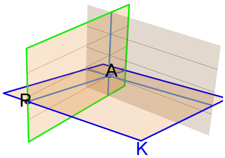
平面の方程式



(i) 点 A(a, b, c) を通り，ベクトル $\boldsymbol{n} = (\alpha, \beta, -1)$ と垂直な平面 K の方程式は

$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b) \cdots (\star)$$

である．

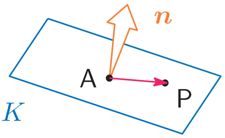


(ii) K と 平面 $y = b$ が交わってできる直線の傾き (これを x 方向傾きという) は α である。同様に y 方向傾きは β である．

平面 $y = b$ は A を通って y 軸に垂直な平面である。

2 変数関数

平面と 1 次関数



[確かめ] (i) P(x,y,z) : K 上の A でない任意の点とする。

P は K 上にある. $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \boldsymbol{n} \ldots (\star\star)$

である. また $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-a, y-b, z-c)$ であるから

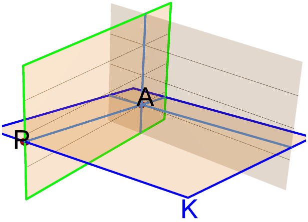
$$(\star\star) \iff (x-a, y-b, z-c) \bullet (\alpha, \beta, -1) = 0$$

$$\iff \alpha(x-a) + \beta(y-b) - (z-c) = 0$$

$$\iff (\star)$$

だから K の方程式は $(\star)$ である.

2 変数関数
平面と 1 次関数



(ii) P(x, y, z) を，A(a, b, c) から K 上で y 座標は b のまま変えずに x 軸方向に移動させた点とする。（z 座標は変化する。）
x, y, z は $\star$ を満たすからこれに $y = b$ を代入すると

$$z - c = \alpha(x - a)$$

したがって

$$\alpha = \frac{z - c}{x - a}$$

だから AP の傾きは α。

2 変数関数

平面と 1 次関数

2 変数の 1 次関数のグラフ

(i) 1 次関数 $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$ のグラフは平面である。

(ii) この平面はベクトル $\boldsymbol{n}=(\alpha,\beta,-1)$ に垂直であり, x 方向傾きは α, y 方向傾きは β である。

[確かめ] $f(x,y)=z$ とおくと

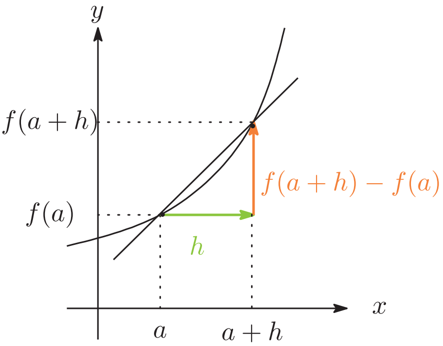
$$z=\alpha x+\beta y+\gamma \quad\Longleftrightarrow\quad z-\gamma=\alpha(x-0)+\beta(y-0)$$

だから前に述べたことからわかる。

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の定義

[復習：1 変数関数の微分係数]



$y=f(x)$：1 変数関数　a：定数
のとき

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

：a における微分係数

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の定義

2 変数関数の偏微分係数の定義

$z = f(x, y)$ を 2 変数関数, A(a, b) を定点とするとき, 2 変数関数 $z = f(x, y)$ は点 A(a, b) で x に関して偏微分可能であるとは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \quad \cdots (\star)$$

が存在すること。
$(\star)$ を点 A$(a.b)$ における $f(x, y)$ の x に関する偏微分係数とよび, 記号

$$f_x(a, b), \ \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}, \cdots$$

で表す。

y に関する偏微分係数も同様に定める。

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の定義

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\clubsuit)$$

と

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \cdots (\star)$$

を比較すると，

$(\star)$ は y を定数 b に固定して，$f(x, b)$ を x のみの 1 変数関数とみて微分したもの

ということができる。

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の定義

2 変数関数の偏導関数の定義

(i) 関数 $z = f(x, y)$ が集合 D の各点で偏微分可能であるとき，D で偏微分可能であるという．

(ii) $(x, y) \in D$ に対して微分係数 $f_x(x, y)$ が決まるが，これによって決まる関数

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

を $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数と呼び，記号

$$f_x(x, y), \quad \big(f(x, y)\big)_x, \quad f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

などで表す． y に関する偏導関数も同様に定める。

(iii) 偏導関数を求めることを偏微分するという．

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

[例 1.]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき 正解は？

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + 2y \ ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + y + y^2 \ ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + y^2 \ ?$$

すべて誤り!

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

[例 1 の正解]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3 + 0.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a + 0.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき y を定数と見て x で微分して

$$f_x(x, y) = (x^2)_x + (x)_x y + (y^2)_x = 2x + y + 0.$$

(3)' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき x を定数と見て y で微分して

$$f_y(x, y) = (x^2)_y + x(y)_y + (y^2)_y = 0 + x + 2y.$$

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

偏微分法では, 1 変数関数の微分法の計算方法がすべて使える.

[例 2.] 合成関数の微分法が使える.

合成関数の微分法を復習しよう。

記号 $f'(x)$ のかわりに $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を使う。同じ意味！。

(1) $f(x) = (2x+3)^4$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x+3)^4 \\
&= \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{d}{dx}(2x+3) \\
&= 4t^3 \times 2 = 8(2x+3)^3
\end{aligned}$$

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

(2) $f(x,y)=(2x+3y)^4$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f_x(x,y)=\left((2x+3y)^4\right)_x$$
$$=\left(t^4\right)_x=\left(t^4\right)_t\times t_x$$
$$=\left(t^4\right)_t\times(2x+3y)_x=4t^3\times 2=8(2x+3y)^3$$

$$f_y(x,y)=\left((2x+3y)^4\right)_y$$
$$=\left(t^4\right)_y=\left(t^4\right)_t\times t_y$$
$$=\left(t^4\right)_t\times(2x+3y)_y=4t^3\times 3=12(2x+3y)^3$$

簡単のため $\dfrac{d}{dt}$ の代わりに $\square_t$, $\dfrac{\partial}{\partial x}$ の代わりに $\square_x$ 等々を使った。

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

[例 3.]

(1) $f(x) = \sin(2x+3)$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{d}{dx}(2x+3) = 2\cos(2x+3)$$

(2) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\sin(2x+3y))_x = (\sin t)_x \\ &= (\sin t)_t \times t_x = (\sin t)_t \times (2x+3y)_x = \cos t \times 2 = 2\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\sin(2x+3y))_y = (\sin t)_y \\ &= (\sin t)_t \times t_y = (\sin t)_t \times (2x+3y)_y = \cos t \times 3 = 3\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

[例 4.]　積の微分法を使うことができる.

(1)　$f(x,y)=xy\sin(2x+3y)$ のとき 積の微分法により

$$\begin{aligned}
f_x(x,y)&=(xy)_x\sin(2x+3y)+xy\left(\sin(2x+3y)\right)_x\\
&=y\sin(2x+3y)+xy\left(2\cos(2x+3y)\right)\\
&=y\sin(2x+3y)+2xy\cos(2x+3y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_y(x,y)&=(xy)_y\sin(2x+3y)+xy\left(\sin(2x+3y)\right)_y\\
&=x\sin(2x+3y)+xy\left(3\cos(2x+3y)\right)\\
&=x\sin(2x+3y)+3xy\cos(2x+3y).
\end{aligned}$$

偏微分係数・偏導関数

偏微分係数・偏導関数の計算

[例 5.] 重要!! 距離を表す関数

(1) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ のとき $x^2+1=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sqrt{t} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}} \times \frac{d}{dx}(x^2+1) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ のとき $x^2+y^2=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_x = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y(x,y) &= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y \\ &= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2+y^2)_y = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$