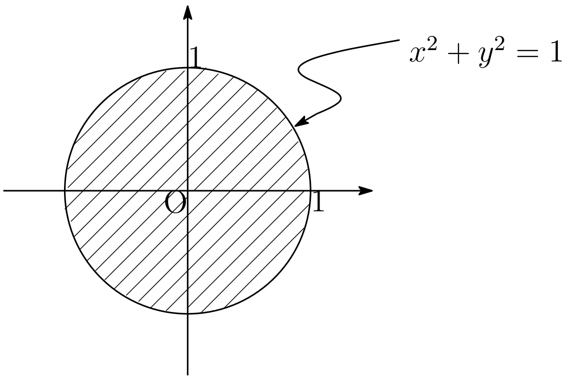
環境基礎解析学II 演習問題 No.7 解答

1 次の積分領域を図示し二重積分を計算せよ.

(1) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$ とするとき

$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$



極座標変換すると

$\sqrt{x^2 + y^2} = r,\quad dxdy = rdrd\theta,$

$\Omega = \{(r, \theta)\ :-\pi \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq 1\ \}$

だから

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \iint_\Omega r\, rdrd\theta$$

累次積分すると

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^1 \left(r^2\right) dr \right] d\theta = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_{r \to 0}^{r \to 1} = 2\pi \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2\,\pi}{3}$$

(2) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq R^2\}$ (R は正の定数) とするとき

$\displaystyle\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$

極座標変換すると

$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2},\quad dxdy = rdrd\theta,$

$\Omega = \{(r, \theta)\ :-\pi \leqq \theta \leqq \pi,\ 0 \leqq r \leqq R\ \}$

だから

$$= \iint_{\Omega} \sqrt{R^2 - r^2}\, r dr d\theta$$

累次積分すると

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - r^2} \right) r\ dr \right] d\theta$$

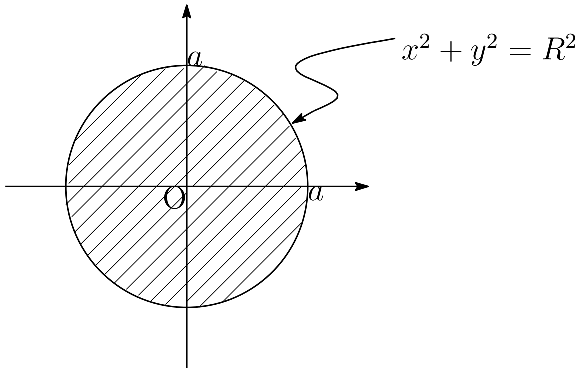
$R^2 - r^2 = t$ とおくと

$\dfrac{dt}{dr} = -2r$ だから $rdr = \dfrac{-dt}{2}$

$r = 0$ のとき $t = R^2$, $r = R$ のとき $t = 0$

だから

$$= 2\pi \int_{R^2}^{0} \sqrt{t} \left(\frac{-dt}{2} \right) = 2\pi \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-1}{2} \right) \right]_{t \to R^2}^{t \to 0} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

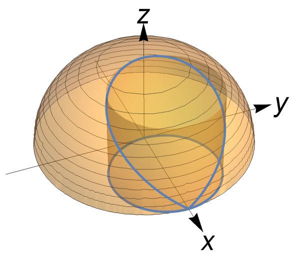


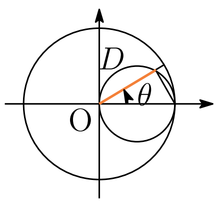
(3) $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq x\}$ とするとき

$$\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

$$x^2 + y^2 \leqq x$$
$$\Updownarrow$$
$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 \leqq \frac{1}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

だから Dは $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 中心半径 $\frac{1}{2}$ の円板。





Dを極座標で表すと

$$(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leqq r \leqq \boxed{\cos\theta} \end{cases}$$

したがって積分を極座標に変換すると.

$dxdy = r dr d\theta$, $\quad x^2 + y^2 = r^2$

だから

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1 - r^2}\, r dr d\theta$$

$1 - r^2 = t$ とおくと

$\frac{dt}{dr} = -2r$ だから $r\,dr = -\frac{dt}{2}$

$r=0 \Rightarrow t=1,\ r=\cos\theta \Rightarrow t = 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$

だから

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{1}^{\sin^2\theta} \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\right]_{t=1}^{t=\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\left(\sin^3\theta - 1\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta$$

ところで $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta$

ここで $\cos\theta = s$ とおくと $\frac{ds}{d\theta} = -\sin\theta$ より $\sin\theta\, d\theta = -ds$

$\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow s=0,\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s=0$ だから

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \int_0^0 (1-s^2)(-ds) = 0$$

したがって もとの積分は

$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{3} \quad //$$