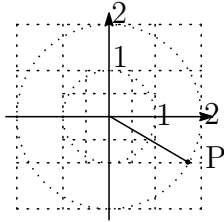


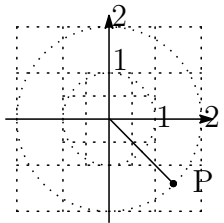
## 環境基礎解析学II 第3回問題 解答

問題 1. (1) 直角座標  $(\sqrt{3}, -1)$  の点 P を図示し, その極座標を求めよ.



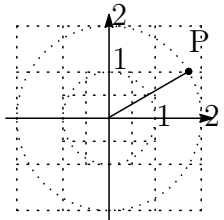
$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad \theta = -\frac{\pi}{6} \quad \text{だから極座標は } (2, -\frac{\pi}{6}).$$

(2) 直角座標  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  の点 P を図示し, その極座標を求めよ.



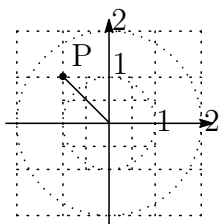
$$r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2, \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \quad \text{だから極座標は } (2, -\frac{\pi}{4}).$$

(3) 極座標  $(2, \frac{\pi}{6})$  の点 P を図示し, その直角座標を求めよ.



$$x = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1 \quad \text{だから直角座標は } (\sqrt{3}, 1).$$

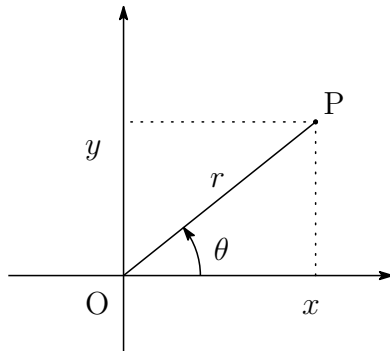
(4) 極座標  $(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$  の点 P を図示し, その直角座標を求めよ.



$$x = \sqrt{2} \cos \frac{3\pi}{4} = -1 \quad y = \sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{4} = 1 \quad \text{だから直角座標は } (-1, 1).$$

問題 2 極座標が  $(r, \theta)$  である点の直角座標を  $(x, y)$  とする.

(1)  $x, y$  を  $r, \theta$  を用いて表せ.



図より  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

(2) このとき次の偏導関数を計算せよ.

$$x_r = (r \cos \theta)_r = (r)_r \cos \theta = \cos \theta$$

$$x_\theta = (r \cos \theta)_\theta = r(\cos \theta)_\theta = -r \sin \theta.$$

$$y_r = (r \sin \theta)_r = (r)_r \sin \theta = \sin \theta$$

$$y_\theta = (r \sin \theta)_\theta = r(\sin \theta)_\theta = r \cos \theta.$$

問題 3. 直角座標が  $(x, y)$  である点の極座標を  $(r, \theta)$  とする.

(1)  $r$  を  $x, y$  を用いて表せ.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ である.}$$

(2)  $r$  は  $x, y$  の 2 変数関数であるが  $x$  に関する偏導関数  $r_x$  を求めよ.

$$r_x = \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_x$$

$x^2 + y^2 = t$  とおくと  $r = \sqrt{t}$  だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} &= \left( \sqrt{t} \right)_t \times t_x = \left( t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$r, \theta$  で書き直すと

$$= \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$$

(3)  $r_y$  を計算せよ.

$$r_y = \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_y$$

$x^2 + y^2 = t$  とおくと  $r = \sqrt{t}$  だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} &= \left( \sqrt{t} \right)_t \times t_y = \left( t^{\frac{1}{2}} \right)_t \times (x^2 + y^2)_y = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2y \\ &= \frac{y}{\sqrt{t}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$r, \theta$  で書き直すと

$$= \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta$$

**問題 4.** 直角座標が  $(x, y)$  である点の極座標を  $(r, \theta)$  とする.

(1)  $\sin \theta, \cos \theta$  を  $x, y$  を用いて表せ.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \text{ だから } \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ y &= r \sin \theta \text{ だから } \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用して  $(\sin \theta)_x$  を計算せよ.

$$(\sin \theta)_x = \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_x$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_x \sqrt{x^2 + y^2} - y \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_x}{x^2 + y^2}$$

$(y)_x = 0$  と前問の結果 より

$$\begin{aligned} &= \frac{-y \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$r, \theta$  で書き直すと

$$= \frac{-r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^3} = \frac{-\sin \theta \cos \theta}{r}$$

(3)  $(\sin \theta)_x = (\sin \theta)_\theta \times \theta_x$  と (2) の結果を利用して  $\theta_x$  を計算せよ。  
 $\theta$  は  $x, y$  の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin \theta)_x = (\sin \theta)_\theta \times \theta_x = \cos \theta \times \theta_x$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \theta_x \cdots \textcircled{2}$$

①=② だから

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin \theta}{r}$$

(4)  $\theta_y$  を計算せよ。

$$(\sin \theta)_y = \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_y \sqrt{x^2 + y^2} - y \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)_y}{x^2 + y^2}$$

$(y)_y = 1$  と前問の結果 より

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - y \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)}{x^2 + y^2}$$

分母分子に  $\sqrt{x^2 + y^2}$  をかけて

$$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots \textcircled{1}$$

$r, \theta$  で書き直すと

$$= \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^3} = \frac{\cos^2 \theta}{r}$$

一方  $\theta$  は  $x, y$  の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin \theta)_y = (\sin \theta)_\theta \times \theta_y = \cos \theta \times \theta_y$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \theta_y \cdots \textcircled{2}$$

①=② だから

$$\theta_y = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}$$

[余談] 問題 2, 3, 4 の結果をまとめると

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\frac{\sin \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるということが出てくる。このことを確かめよ。またどうしてこうなるのか考えよ。