環境基礎解析学 II　第 2 回問題解答

問題 1. 次の関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を計算せよ。

(1) $f(x,y) = 3xy^2$

x に関する偏微分は x のみの関数として微分することであるから, $3,\ y^2$ は定数としてあつかうので $(\ )_x$ の外に出せる。

$$f_x(x,y) = (3xy^2)_x = 3y^2(x)_x = 3y^2\,1 = 3y^2$$

y に関する偏微分は y のみの関数として微分することであるから, $3,\ x$ は定数としてあつかうので $(\ )_y$ の外に出せる。

$$f_y(x,y) = (3xy^2)_y = 3x(y^2)_y = 3x\,2y = 6xy$$

(2) $f(x,y) = \sin(3xy^2)$

$3xy^2 = t$ とおき合成関数の微分法を使う。

$$f_x(x,y) = (\sin(3xy^2))_x = (\sin(t))_x$$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_x = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_x = \cos(t) \times 3y^2 = 3y^2\cos(3xy^2)$$

$$f_y(x,y) = (\sin(3xy^2))_y = (\sin(t))_y$$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_y = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_y = \cos(t) \times 6xy = 6xy\cos(3xy^2)$$

(3) $f(x,y) = xy\sin(3x-2y)$

積の微分法と合成関数の微分法が必要である。

まず積の微分法により

$$f_x(x,y) = (xy)_x\sin(3x-2y) + xy(\sin(3x-2y))_x$$

つぎに, (1) と同様にして $(xy)_x = y$. また, $3x-2y = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}(\sin(3x-2y))_x &= (\sin(t))_x = (\sin(t))_t \times t_x \\ &= (\sin(t))_t \times (3x-2y)_x = \cos(t) \times 3 = 3\cos(3x-2y)\end{aligned}$$

あわせて

$$f_x(x,y) = y\sin(3x-2y) + xy(3\cos(3x-2y)) = y\sin(3x-2y) + 3xy\cos(3x-2y)$$

同様に, 積の微分法により

$$f_y(x,y) = (xy)_y \sin(3x-2y) + xy(\sin(3x-2y))_y$$

つぎに, (1) と同様にして $(xy)_y = x$. また, $3x-2y=t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}(\sin(3x-2y))_y &= (\sin(t))_y = (\sin(t))_t \times t_y \\ &= (\sin(t))_t \times (3x-2y)_y = \cos(t)\times(-2) = -2\cos(3x-2y)\end{aligned}$$

あわせて

$$f_y(x,y) = x\sin(3x-2y) + xy(-2\cos(3x-2y)) = x\sin(3x-2y) - 2xy\cos(3x-2y)$$

(4) $f(x,y) = x\sin y - \cos(xy)$

$xy = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$(\cos(xy))_x = (\cos(t))_x = (\cos(t))_t \times t_x = (\cos(t))_t \times (xy)_x = -\sin(t)\times y = -y\sin(xy)$$
$$(\cos(xy))_y = (\cos(t))_y = (\cos(t))_t \times t_y = (\cos(t))_t \times (xy)_y = -\sin(t)\times (x) = -x\sin(xy)$$

だから

$$f_x(x,y) = (x\sin y)_x - (\cos(xy))_x = (x)_x \sin y - (\cos(xy))_x = \sin y + y\sin(xy)$$
$$f_y(x,y) = (x\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x(\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x\cos y + x\sin(xy)$$

(5) $f(x,y) = e^{3x-2y}$ のとき,

$3x-2y = t$ とおくと $z = e^{3x-2y}$ は $z = e^t$ と $t = 3x-2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_x \\ &= e^t \times 3 = 3e^{3x-2y}.\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_y \\ &= e^t \times (-2) = -2e^{3x-2y}.\end{aligned}$$

(6) $f(x,y) = \sin(xy)$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$\begin{aligned}f_x(x,y) &= (\sin t)_t \times t_x \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_x \\ &= \cos t \times y = y\cos(xy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_y(x,y) &= (\sin t)_t \times t_y \\ &= (\sin t)_t \times (xy)_y \\ &= \cos t \times x = x\cos(xy)\end{aligned}$$

(7) $f(x,y) = e^{3x-2y}\sin(xy)$

ふたつの関数 e^{3x-2y} と $\sin(xy)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$f_x(x,y) = (e^{3x-2y})_x \sin(xy) + e^{3x-2y}\,(\sin(xy))_x$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= 3e^{3x-2y}\sin(xy) + ye^{3x-2y}\cos(xy) \\ &= e^{3x-2y}(3\sin(xy) + y\cos(xy)) \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x,y) = (e^{3x-2y})_y \sin(xy) + e^{3x-2y}\,(\sin(xy))_y$$

(1), (2) により

$$\begin{aligned} &= -2e^{3x-2y}\sin(xy) + xe^{3x-2y}\cos(xy) \\ &= e^{3x-2y}(-2\sin(xy) + x\cos(xy)) \end{aligned}$$

(8) $f(x,y) = x\cos y - \sin x\cos y + \sin(xy)$.

$xy = t$ とおいて

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (x\cos y)_x - (\sin x\cos y)_x + (\sin(xy))_x \\ &= (x)_x\cos y - (\sin x)_x\cos y + (\sin t)_t \times t_x \\ &= \cos y - \cos x\cos y + \cos t \times y \\ &= \cos y - \cos x\cos y + y\cos(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (x\cos y)_y - (\sin x\cos y)_y + (\sin(xy))_y \\ &= x(\cos y)_y - \sin x(\cos y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\ &= -x\sin y + \sin x\sin y + \cos t \times x \\ &= -x\sin y + \sin x\sin y + x\cos(xy) \end{aligned}$$

問題 2. (1) 略　(第 1 回のスライドを参考にせよ)

(2) $z = f(x,y)$ のグラフは空間の点 $(x, y, f(x,y))$ を集めた集合である. だから グラフ上の $x = a$, $y = b$ であるような点の座標は

$$(a, b, f(a,b)) = (a, b, \sqrt{R^2 - a^2 - b^2})$$

である。

(3) $x^2 + y^2 < R^2$ のとき $R^2 - x^2 - y^2 = t$ とおくと $t > 0$. ここで合成関数の微分

法を使うと

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x \\
&= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (R^2-x^2-y^2)_x \\
&= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \\
f_y(x,y) &= \left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y \\
&= \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (R^2-x^2-y^2)_y \\
&= \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times (-2y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}
\end{aligned}
$$

(4) したがって

$$
f_x(a,b) = \frac{-a}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}, \quad f_y(a,b) = \frac{-b}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}
$$

である. 接平面上の点を (x,y,z) とおき, 上の結果を $z=f(x,y)$ の $\mathrm{A}(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式

$$
z-f(a,b) = f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)
$$

に代入すると

$$
z-\sqrt{R^2-a^2-b^2} = \frac{-a(x-a)}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}} + \frac{-b(y-b)}{\sqrt{R^2-a^2-b^2}}
$$

となる. これが球面の接平面の方程式である。

さらに $\sqrt{R^2-a^2-b^2}=c>0$ とおき整理すると $a^2+b^2+c^2=R^2$ であるから,

$$
ax+by+cz=R^2
$$

となり大変簡単になる. これが何を意味するか考えよ。

また, 法線ベクトルは

$$
(f_x(a,b), f_y(a,b), -1) = \left(-\frac{a}{c}, -\frac{b}{c}, -1\right) = \frac{-1}{c}(a,b,c)
$$

であるが, これは中心と接点を結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (a,b,c)$ に平行である。これが何を意味するかも考えよ。