環境基礎解析学 II 第 1 回問題解答

問題 1. (1) ベクトル $\boldsymbol{n} = (1, 2, -1)$ に垂直で点 $\mathrm{A}(1, 1, 0)$ を通る平面 K の方程式を書け。

点 (a, b, c) を通りベクトル $\boldsymbol{n} = (\alpha, \beta, -1)$ に垂直な平面の方程式は

$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b)$$

だからこれに

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ a = 1,\ b = 1, c = 0$$

を代入して

$$z - 0 = 1(x - 1) + 2(y - 1)$$

整理して

$$z = x + 2y - 3$$

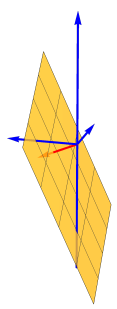
(2) 平面 K と z 軸の交点を求めよ。

交点の座標を $\mathrm{P}(x, y, z)$ とすると

$$\begin{cases} z = x + 2y - 3, & \mathrm{P} \text{ が } K \text{ 上にあるから} \\ x = 0, y = 0, & \mathrm{P} \text{ が } z \text{ 軸上にあるから} \end{cases}$$

を解いて $z = -3$, したがって P の座標は $(0, 0, -3)$.

(3) 平面 K と 原点との距離を求めよ。



K に原点から垂線を引いたときの K との交点を $\mathrm{H}(x, y, z)$ とおく。これが原点から最短距離にある点である。なぜなら、K 上の任意の点を P とするとき, $\mathrm{OH} \perp \mathrm{HP}$ となるから三平方の定理により

$\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HP}^2 \geqq \mathrm{OH}^2$

となるからである。

$\mathrm{OH}//\boldsymbol{n}$ だから $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (x, y, z) = t\boldsymbol{n} = (t, 2t, -t)$

となる実数 t がある。これを $z = x + 2y - 3$ に代入して $t = \frac{1}{2}$. したがって

OH$= |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = |(t, 2t, -t)| = \sqrt{6}|t| = \frac{\sqrt{6}}{2}$

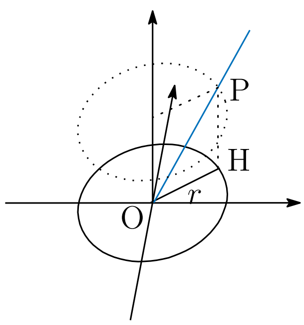
問題 2. (1) 2 変数関数 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ のグラフが逆さにした円錐の表面となることを説明せよ。

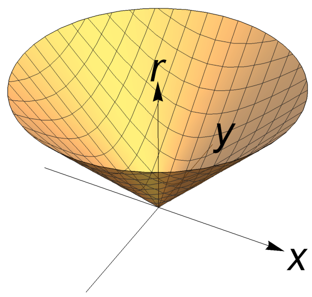
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。これは原点 O と xy 平面上の点 A(x, y) との距離である。

$f(x, y) = r$ だから関数 $f(x, y)$ の値は点 (x, y) と原点との距離 r だけで決まることになる. だからこの関数のグラフは z 軸を中心にした回転体となる.

いま, $f(x, y) = z$ とおくと $z = r$ であるから, 原点 O, 点 H$(x, y, 0)$, 点 P(x, y, z) は直角 2 等辺三角形を作り, 角 ∠HOP は常に $\dfrac{\pi}{4}$ である。だから P は原点をとおり傾き 1 の直線上にある。

$z = f(x, y)$ のグラフはこの直線を z 軸を中心に回転させた回転体となる. したがって円錐面である.





(2) この関数のグラフの概形を Mathematica で書いてみよ。

問題 3. (1) $f(x, y) = 3x + y - 2$

$(y)_x = 0, (3x)_y = 0$ に注意して

$f_x(x, y) = (3x + y - 2)_x = (3x)_x + (y)_x - (2)_x = 3 + 0 - 0 = 3$

$f_y(x, y) = (3x + y - 2)_y = (3x)_y + (y)_y - (2)_y = 0 + 1 - 0 = 1$

(2) $f(x, y) = (3x + y - 2)^9$

$z = f(x, y), t = 3x + y - 2$ とおくと,

$z = f(x, y)$ は $z = t^9$, $t = 3x + y - 2$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$f_x(x, y) = z_x = z_t \times t_x = (t^9)_t \times (3x + y - 2)_x = 9t^8 \times 3 = 27(3x + y - 2)^8$

$f_y(x, y) = z_y = z_t \times t_y = (t^9)_t \times (3x + y - 2)_y = 9t^8 \times 1 = 9(3x + y - 2)^8$

(3) $f(x, y) = 3x - 2y$

$(2y)_x = 0, (3x)_y = 0$ に注意して

$f_x(x, y) = (3x - 2y)_x = 3(x)_x - (2y)_x = 3 - 0 = 3$

$f_y(x, y) = (3x - 2y)_y = (3x)_y - 2(y)_y = 0 - 2 = -2$

(4) $f(x, y) = \cos(3x - 2y)$

$\cos(3x - 2y)$ は $\cos \times (3x - 2y)$ ではないから $\{\cos(3x - 2y)\}_x$ を

$$\cos\{(3x - 2y)_x\}, \quad -\sin\{(3x - 2y)_x\}$$

などとしてはならない. sin の現れる関数を微分するときは $(\sin t)_t = \cos t$ を使わなくてはならない.

詳しく言うと, $3x - 2y = t$ とおくと $z = \cos(3x - 2y)$ は $z = \cos t$ と $t = 3x - 2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= (\cos t)_t \times t_x \\ &= (\cos t)_t \times (3x - 2y)_x \\ &= -\sin t \times 3 = -3\sin(3x - 2y). \end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= (\cos t)_t \times t_y \\
&= (\cos t)_t \times (3x-2y)_y \\
&= -\sin t \times (-2) = 2\sin(3x-2y)
\end{aligned}
$$

(5) $f(x,y) = e^{xy}$

$xy = t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\
&= (e^t)_t \times (xy)_x \\
&= e^t \times y = ye^{xy}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\
&= (e^t)_t \times (xy)_y \\
&= e^t \times x = xe^{xy}
\end{aligned}
$$

(6) $f(x,y) = e^{xy}\cos(3x-2y)$

ふたつの関数 e^{xy} と $\cos(3x-2y)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$
f_x(x,y) = (e^{xy})_x \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_x
$$

(2), (3) により

$$
\begin{aligned}
&= ye^{xy}\cos(3x-2y) - 3e^{xy}\sin(3x-2y) \\
&= e^{xy}(y\cos(3x-2y) - 3\sin(3x-2y))
\end{aligned}
$$

同様に

$$
f_y(x,y) = (e^{xy})_y \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_y
$$

(2), (3) により

$$
\begin{aligned}
&= xe^{xy}\cos(3x-2y) + 2e^{xy}\sin(3x-2y) \\
&= e^{xy}(x\cos(3x-2y) + 2\sin(3x-2y))
\end{aligned}
$$

(7) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$f_x(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)_x$$

偏微分計算 $()_x$ は $+, -$ で分けてよいから

$$= (x^3)_x + (y^3)_x - (3xy)_x$$

y^3, $3y$ は定数と見なすから $()_x$ の外に出してよいから

$$= (x^3)_x + y^3(1)_x - 3y(x)_x = 3x^2 + y^3 \cdot 0 - 3y \cdot 1$$
$$= 3x^2 + 0 - 3y = 3x^2 - 3y$$

同様に

$$f_y(x,y) = (x^3 + y^3 - 3xy)_y$$

偏微分計算 $()_y$ は $+, -$ で分けてよいから

$$= (x^3)_y + (y^3)_y - (3xy)_y$$

x^3, $3x$ は定数と見なすから $()_y$ の外に出してよいから

$$= x^3(1)_y + (y^3)_y - 3x(y)_y = x^3 \cdot 0 + 3y^2 - 3x \cdot 1$$
$$= 0 + 3y^2 - 3x = 3y^2 - 3x$$

(8) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^3 + y^3 - 3xy}$ (訂正)

$z = f(x,y), t = x^3 + y^3 - 3xy$ とおくと,

$z = f(x,y)$ は $z = \dfrac{1}{t}$, $t = x^3 + y^3 - 3xy$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$f_x(x,y) = z_x = z_t \times t_x = (\frac{1}{t})_t (x^3 + y^3 - 3xy)_x = \frac{-1}{t^2} \times (3x^2 - 3y)$$
$$= \frac{-(3x^2 - 3y)}{(x^3 + y^3 - 3xy)^2}$$

$$f_y(x,y) = z_y = z_t \times t_y = (\frac{1}{t})_t (x^3 + y^3 - 3xy)_y = \frac{-1}{t^2} \times (-3x + 3y^2)$$
$$= \frac{3x - 3y^2}{(x^3 + y^3 - 3xy)^2}$$

(9) $f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3 - 3xy}$ (訂正)

$z=f(x,y), t=x^3+y^3-3xy$ とおくと,

$z=f(x,y)$ は $z=\sqrt{t},\ t=x^3+y^3-3xy$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$f_x(x,y)=z_x=z_t\times t_x=(\sqrt{t})_t(x^3+y^3-3xy)_x=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times(3x^2-3y)$$

$$=\frac{3x^2-3y}{2\sqrt{x^3+y^3-3xy}}$$

$$f_y(x,y)=z_y=z_t\times t_y=(\sqrt{t})_t(x^3+y^3-3xy)_y=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times(-3x+3y^2)$$

$$=\frac{-3x+3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3-3xy}}$$

(10) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

スライドを見てください。