本日やること

1. 曲線と線積分
   - 1 変数ベクトル関数
   - 曲線
2. ベクトル解析
   - 曲面と面積分

詳しいことは 2 年次の「電気のための微分積分 D」で勉強してください。

曲線と線積分

1 変数ベクトル関数

ここからは空間で考える。

1 変数ベクトル関数・成分表示

実数に空間のベクトルを対応させる写像

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R} & & \text{ベクトル} \\
t & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(t)
\end{array}
:
$$

を 1 変数ベクトル関数という。成分表示すると

$$\vec{\boldsymbol{A}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

のように各成分は t の関数となる。

$t \to t_0$のとき$\vec{\boldsymbol{A}}(t) \to (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow (x(t) \to x_0, y(t) \to y_0, z(t) \to z_0)$

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が連続 $\Leftrightarrow$ 各成分関数が連続

曲線と線積分

1 変数ベクトル関数の微分法

1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$$\overrightarrow{\boldsymbol{A}(t)} \text{ が } t_0 \text{ で微分可能} \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{A}}(t_0 + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)}{\Delta t} \cdots (\star) \text{ が存在}$$

$(\star)$ を t_0 における**微分係数ベクトル**といい

記号： $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}(t_0),\quad \dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t_0), \cdots$

で表す

曲線と線積分

1 変数ベクトル関数の微分法

微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が t_0 で微分可能 $\iff$ $x(t), y(t), z(t)$ が t_0 で微分可能

$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 成分ごとに微分すればよい。

[確かめ]

$$\frac{\vec{A}(t_0+\varDelta t) - \vec{A}(t_{o})}{\varDelta t}$$

$$= \frac{(x(t_0+\varDelta t) - x(t_{o}), y(t_{o}+\varDelta t) - y(t_{o}), z(t_{o}+\varDelta t) - z(t_{o}))}{\varDelta t}$$

$$= \left(\frac{(x(t_0+\varDelta t) - x(t_{o})}{\varDelta t}, \frac{y(t_0+\varDelta t) - y(t_{o})}{\varDelta t}, \frac{z(t_0+\varDelta t) - z(t_{o})}{\varDelta t} \right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x'(t_0) \qquad\qquad y'(t_0) \qquad\qquad z'(t_0)$$

曲線と線積分

1 変数ベクトル関数の微分法

1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \dot{\vec{A}}(t)$ を $\vec{A}(t)$ の**導関数ベクトル**という

導関数の成分表示

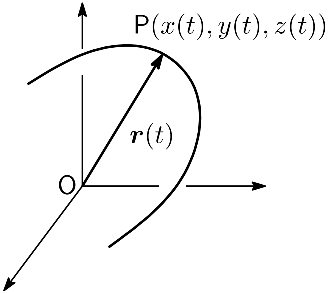
$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

曲線と線積分

曲線

曲線のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$：連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす点 P の軌跡 C は連続な曲線となる.

$(\star)$ を曲線 C のパラメータ表示といい, t をパラメータという。

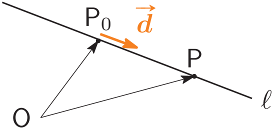
曲線と線積分

曲線と線積分

[例] 点 P_0 を通り, ベクトル $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ に平行な直線 ℓ のパラメータ表示は

$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\vec{\boldsymbol{d}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

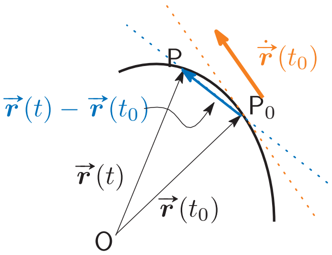
$\vec{\boldsymbol{d}}$ を方向ベクトルという



曲線と線積分

曲線と線積分

接ベクトルの定義



$\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) を, P_0 における C の**接ベクトル**という.

[考え方] $t \to t_0$ とすると $\mathrm{P} \to \mathrm{P}_0$ となるので直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}}{t - t_0}$$

だから $\dot{\vec{r}}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

曲線と線積分

曲線と線積分

速度ベクトル・加速度ベクトル

パラメータ t を時刻と考えると P は動点となるが

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ は P の速度ベクトル

$\ddot{\vec{r}}(t_0)$ は P の加速度ベクトル

となる。

曲線と線積分

曲線

曲線の長さ

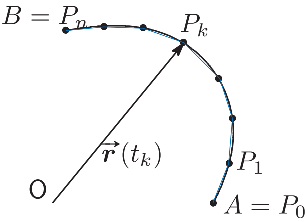
曲線 C の分点を

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}_0, \mathsf{P}_1, \cdots, \mathsf{P}_n = \mathsf{B}$$

とするとき C の長さ L を

$$L = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}_{k-1}\mathsf{P}_k$$

と定める．lim は分点の間隔を細かくする極限。



曲線と線積分

曲線

曲線の長さのパラメータによる計算

C のパラメータ表示を

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

とする。ただし $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ は微分可能, $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ は連続で $\mathbf{0}$ にならないものとする。以後 常にこれが成り立つものと仮定する. このとき

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

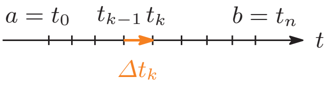
である. 成分表示 $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を使うと

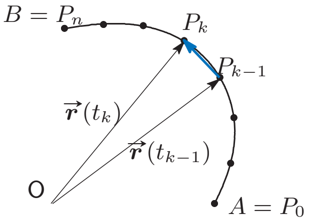
$$= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

曲線と線積分

曲線

[確かめ]





$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k} = \vec{r}(t_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

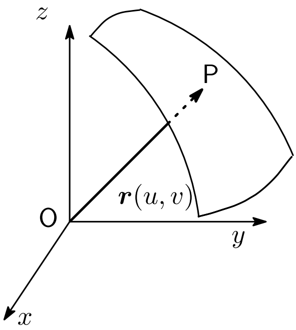
とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k$$

$$L \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

曲面と面積分

曲面のパラメータ表示



$\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)$ を連続な 2 変数ベクトル値関数とするとき

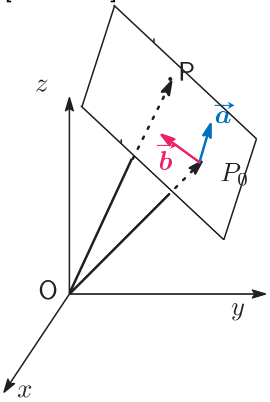
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \cdots (\star)$$

を満たす点 P の軌跡は連続な曲面になる．これを利用して曲面を表す方法を，u, v をパラメータとする曲面のパラメータ表示という．

以後，曲面は $(\star)$ のようにパラメータ表示されているものとする。

曲面と面積分

[例：平面]



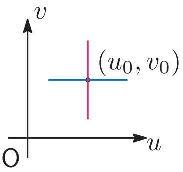
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}_0 + u\vec{\boldsymbol{a}} + v\vec{\boldsymbol{b}}$$

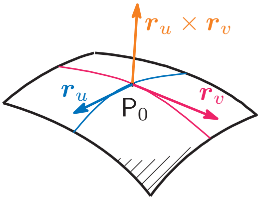
を満たす点 P の軌跡は P_0 をとおり $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ で張られる平面。

$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ を方向ベクトルという。

曲面と面積分

接ベクトル





u 曲線：変数 u のみを動かしたときの点 P の軌跡
v 曲線：変数 v のみを動かしたときの点 P の軌跡

また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = \vec{\boldsymbol{r}}(u_0, v_0)$ とするとき，$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$，$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して $\vec{\mathbf{0}}$ でないならば

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$ は u 曲線の点 P_0 における接ベクトル
$\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ は v 曲線の点 P_0 における接ベクトル

曲面と面積分

接平面・法ベクトル

$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0)$, $\vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$ が存在して 1 次独立ならば, 点 P_0 における接平面の方向ベクトルとなる。以後 $\vec{\boldsymbol{r}}$ はこの性質を持つと仮定する。

また外積

$$\vec{\boldsymbol{r}}_u(u_0, v_0) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u_0, v_0)$$

は接平面に垂直であるが, これと同方向のベクトルを S の点 P_0 における法ベクトルという.

曲面と面積分

曲面積の定義

D は u, v 平面の面積確定な有界閉領域, 曲面 S は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v) \qquad ((u, v) \in D)$$

でパラメータ表示されるとき

$$S \text{ の面積} = \iint_D |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

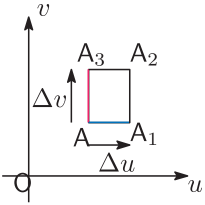
と定める.

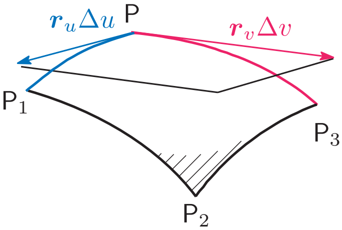
$$dS = |\vec{\boldsymbol{r}}_u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v| du dv$$

を面積要素と呼ぶ.

曲面と面積分

[考え方] u, v が小さい長方形領域 $\mathrm{AA_1A_2A_3}$ を動くとき, 対応する曲面の小部分 $\mathrm{PP_1P_2P_3}$ の面積 $\varDelta S$ は





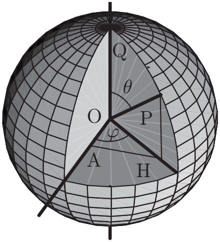
$$\overrightarrow{\mathrm{PP_1}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u+\varDelta u, v) - \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \fallingdotseq \vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v)\varDelta u,$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PP_3}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u, v+\varDelta v) - \vec{\boldsymbol{r}}(u,v) \fallingdotseq \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)\varDelta v$$

$$\varDelta S \fallingdotseq |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v)\varDelta u \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)\varDelta v| = |\vec{\boldsymbol{r}}_u(u,v) \times \vec{\boldsymbol{r}}_v(u,v)|\varDelta u \varDelta v$$

のように近似されるから.

曲面と面積分

球面と球面座標



S を 原点中心, 半径 a の球面とするとき,
P$\in S$ の直交座標は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$$
$$(0 \leqq \theta \leqq \pi,\quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

と表される。ただし P(x, y, z), H$(x, y, 0)$, A$(x, 0, 0)$, Q$(0, 0, a)$ とするとき

$$\angle\mathrm{QOP} = \theta,\quad \angle\mathrm{AOH} = \varphi$$

である。これを球面座標表示という.