# 本日やること

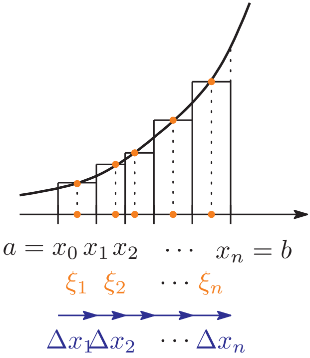
1. 2 変数関数の重積分法
   - 2 重積分
   - 2 重積分の基本的性質
   - 累次積分
   - 極座標による重積分
2. 曲線と線積分
   - 1 変数ベクトル関数
   - 曲線
   - 線積分

詳しいことは 2 年次の「電気のための微分積分 D」で勉強してください。

# 重積分法

## 復習

[復習：1 変数関数 $f(x)$ の $[a,b]$ 上定積分の定義]




$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \;\; k = 1, \cdots, n$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \;\; k = 1, \cdots, n$$

$$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$$

として

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

を 区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(x)$ の定積分という。

# 二重積分

## 積分領域の分割

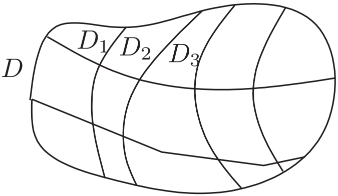
平面の点集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x,y)$ の $D$ 上積分を考えたい。
$D$ としては連続な曲線で囲まれた図形のようなものを考える。積分領域とよぶ。

$\mathcal{P} = \{D_1, \dots, D_n\}$ が $D$ の分割であるとは,

(i) $D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$

(ii) 各 $D_k$ は境界以外では互いに共通部分をもたない図形

であること。



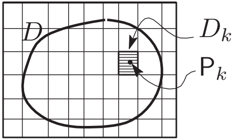

当分 $D$, $D_k$ は長方形のようなものを考える。

# 二重積分

## 定義

### 2 重積分の定義

$D$ : 面積をもつ有界閉領域
$f(x,y)$ : $D$ 上で定義された関数
$\mathcal{P}=\{D_1,\ldots,D_n\}$ : $D$ の分割
$\mathsf{P}_k\in D_k,\ k=1,\ldots,n$




$f(x,y)$ は $D$ 上で積分可能 $\Leftrightarrow$

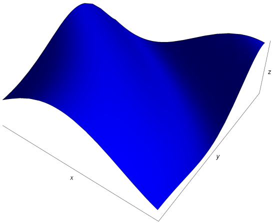
$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\mathsf{P}_k)m(D_k)\quad(\mathcal{P},\{\mathsf{P}_k\}\text{ のとりかたによらず存在})$$

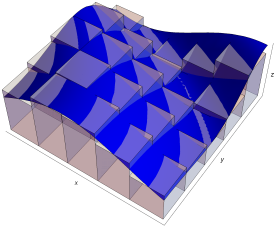
この極限値 $=\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$,　$f(x,y)$ の $D$ 上の 2 重積分と呼ぶ

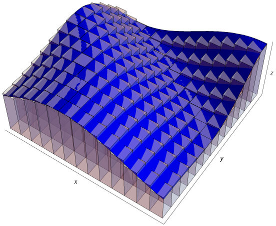
($m(D_k)$ は $D$ の面積を表す。)

# 二重積分

## 定義



# 二重積分

## 2 重積分の基本的性質

1. 面積をもつ有界閉領域 $D$ 上で連続な 2 変数関数は $D$ で積分可能である.

以後、$D$ は面積を持ち有界閉な領域, 関数は連続とする.

2. (i) $\displaystyle \iint_D (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy + \iint_D g(x,y)\,dxdy$

(ii) $\displaystyle \iint_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint_D f(x,y)\,dxdy$ （$k$ は定数とする）

(iii) $D$ 上で $f(x,y) \leqq g(x,y) \Rightarrow \displaystyle \iint_D f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_D g(x,y)\,dxdy$

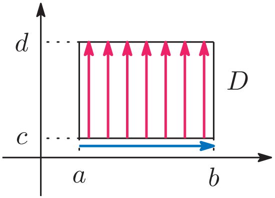
(iv) $D = D_1 \cup D_2$ で $D_1$, $D_2$ が境界以外では共通部分をもたないならば,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy$$

# 2 重積分

## 累次積分

### 累次積分



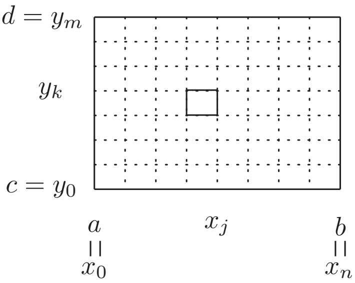

$D = \{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$

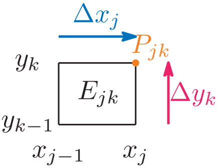
$$\Rightarrow \quad \iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

# 2 重積分

## 累次積分

[確かめ]　$\{E_{jk}\,|j=1,\cdots,n,\ k=1,\cdots,m\}$ により長方形分割する。




$$\text{左辺} \fallingdotseq \sum_{j,k} f(P_{jk})\Delta x_j \Delta y_k$$

$$= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k}^{m} f(x_j, y_k)\Delta y_k\right)\Delta x_j$$

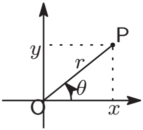
$$\fallingdotseq \sum_{j=0}^{n}\left(\int_c^d f(x_j, y)dy\right)\Delta x_j$$

$$\fallingdotseq \text{右辺}$$

分割を細かくする極限をとると $\fallingdotseq$ が $=$ になる。

# 2 重積分

## 極座標変換による重積分




関数を極座標 $(r, \theta)$ で表した方が積分計算が楽になることがある。

**極座標変換による置換積分法**

$D$ : 面積をもつ有界閉領域　$f(x, y)$ : 連続関数　とするとき

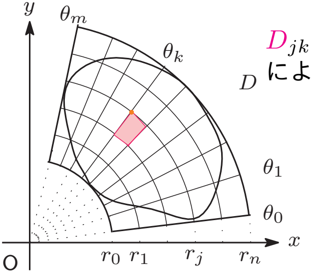
$$(\star)\ \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdrd\theta$$

ただし

$$\Omega = \{\, (r, \theta)\,;\ r \geqq 0,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi \quad (x, y) \in D\}$$

: $(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D$ となるような $(r, \theta)$ の集合

# 2 重積分
## 極座標変換による重積分

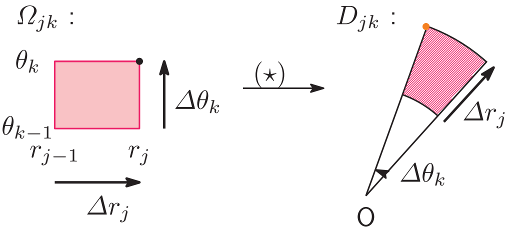



$D_{jk} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid r_{j-1} \leqq r \leqq r_j, \theta_{k-1} \leqq \theta \leqq \theta_k\}$
により扇型分割する。

$$\Delta r_j = r_j - r_{j-1},$$
$$\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1},$$
$$\mathrm{P}_{jk}(r_j\cos\theta_k, r_j\sin\theta_k) \in D_{jk}$$
$$j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m$$

# 2 重積分

## 極座標変換による重積分




$$m(D_{jk}) = r_j \Delta r_j \Delta\theta_k - \frac{1}{2}(\Delta r_j)^2 \Delta\theta_k \fallingdotseq r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

$$\sum_{j,k} f(\mathsf{P}_{jk})\, m(D_{jk}) \fallingdotseq \sum_{j,k} f(r_j \cos\theta_k, r_j \sin\theta_k)\, r_j \Delta r_j \Delta\theta_k$$

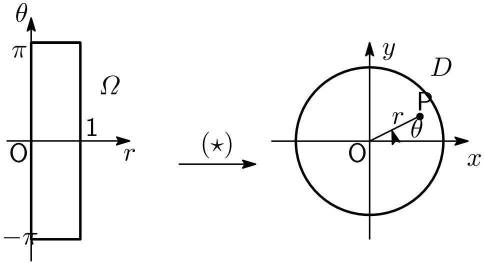
$\downarrow$ 左辺 　　　 $\downarrow$ 右辺

# 2 重積分

## 極座標変換による重積分

$$I = \iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy \quad D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$$

[解]




$\mathsf{P}(x, y) \in D \ \Leftrightarrow\ 0 \leqq r \leqq 1$ より

$\mathit{\Omega} = \{(r, \theta);\ 0 \leqq r \leqq 1,\ -\pi \leqq \theta \leqq \pi\}$

極座標変換　$(\star)$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

により

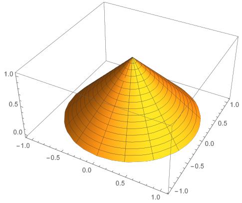
$$1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r, \quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta \ \text{だから}$$

# 2 重積分

## 極座標変換による重積分

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{\Omega} (1-r)\, r dr d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_0^1 (1-r) r dr \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{6}\, d\theta = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

である. □



# 曲線と線積分

## 1 変数ベクトル関数

ここからは空間で考える。

### 1 変数ベクトル関数・成分表示

実数に空間のベクトルを対応させる写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & & \text{ベクトル} \\ t & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(t) \end{array} :$$

を 1 変数ベクトル関数という。
動点の位置ベクトル, 速度ベクトル, 加速度ベクトル, 曲線のパラメータ表示などで現れる。
成分表示すると

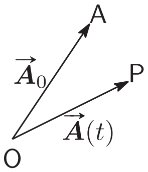
$$\vec{\boldsymbol{A}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

のように各成分は $t$ の関数となる。

# 曲線と線積分

## 1 変数ベクトル関数の微分法

### 1 変数ベクトル関数の極限・連続性




$\lim_{t\to t_0} \mathrm{AP} = 0$　のとき $\lim_{t\to t_0} \vec{\boldsymbol{A}}(t) = \vec{\boldsymbol{A}}_0$　と定める。

実は $\mathrm{P}(x_0, y_0, z_0)$ として

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = x_0,\quad \lim_{t\to t_0} y(t) = y_0,\quad \lim_{t\to t_0} z(t) = z_0$$

と同値。

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が点 $t_0$ で連続 $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to t_0} \vec{\boldsymbol{A}}(t) = \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)$

$\vec{\boldsymbol{A}}(t)$ が区間 $I$ で連続 $\Leftrightarrow$ $I$ の各点で連続

実は各成分関数 $x(t), y(t), z(t)$ が連続であることと同値。

# 曲線と線積分

## 1 変数ベクトル関数の微分法

### 1 変数ベクトル関数の微分係数の定義

$\overrightarrow{\boldsymbol{A}(t)}$ が $t_0$ で微分可能 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\boldsymbol{A}}(t_0 + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{A}}(t_0)}{\Delta t} \cdots (\star)$ が存在

$(\star)$ を $t_0$ における微分係数ベクトルといい

記号：$\dfrac{d\vec{\boldsymbol{A}}}{dt}(t_0),\quad \dot{\vec{\boldsymbol{A}}}(t_0), \cdots$

で表す

# 曲線と線積分

## 1 変数ベクトル関数の微分法

### 微分係数の成分表示

$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$\vec{A}(t)$ が $t_0$ で微分可能 $\iff$ $x(t), y(t), z(t)$ が $t_0$ で微分可能

$\dot{\vec{A}}(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 成分ごとに微分すればよい。

[確かめ]
$$\frac{\vec{A}(t_0+\Delta t) - \vec{A}(t_o)}{\Delta t}$$
$$= \frac{(x(t_0+\Delta t) - x(t_o), y(t_o+\Delta t) - y(t_o), z(t_o+\Delta t) - z(t_o))}{\Delta t}$$
$$= \left(\underset{\substack{\downarrow \\ x'(t_0)}}{\frac{(x(t_0+\Delta t) - x(t_o)}{\Delta t}}, \underset{\substack{\downarrow \\ y'(t_0)}}{\frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_o)}{\Delta t}}, \underset{\substack{\downarrow \\ z'(t_0)}}{\frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_o)}{\Delta t}}\right)$$

# 曲線と線積分

## 1 変数ベクトル関数の微分法

### 1 変数ベクトル関数の導関数ベクトルの定義

$t \mapsto \dot{\vec{A}}(t)$ を $\vec{A}(t)$ の**導関数ベクトル**という

### 導関数の成分表示

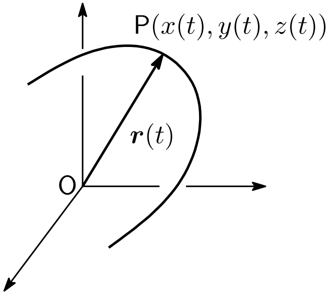
$\vec{A}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ のとき

$$\dot{\vec{A}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

# 曲線と線積分

## 曲線

### 曲線のパラメータ表示




$\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ : 連続な 1 変数ベクトル値関数

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad ①$$

を満たす点 P の軌跡 $C$ は連続な曲線となる.

$(\star)$ を曲線 $C$ のパラメータ表示といい, $t$ をパラメータという。

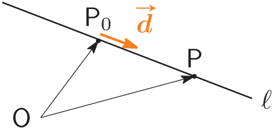
# 曲線と線積分

## 曲線と線積分

[例] 点 $\mathrm{P}_0$ を通り，ベクトル $\boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$ に平行な直線 $\ell$ のパラメータ表示は

$$\ell : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0} + t\vec{\boldsymbol{d}} \quad (t \in \mathbb{R})$$

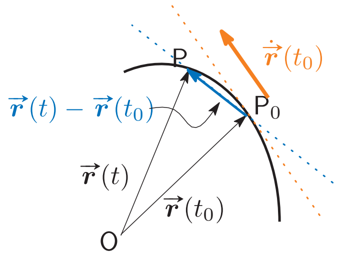
$\vec{\boldsymbol{d}}$ を方向ベクトルという



# 曲線と線積分

## 曲線と線積分

### 接ベクトルの定義




$\dot{\vec{r}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき

$\dot{\vec{r}}(t_0)$ (の 0 でない定数倍) を, $\mathrm{P}_0$ における $C$ の**接ベクトル**という.

[考え方] $t \to t_0$ とすると $\mathrm{P} \to \mathrm{P}_0$ となるので直線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}$ は曲線の接線に近づくと考えられるが

$$\dot{\vec{r}}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}(t)-\vec{r}(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}}{t-t_0}$$

だから $\dot{\vec{r}}(t_0)$ は接線の方向ベクトルとなる。

# 曲線と線積分

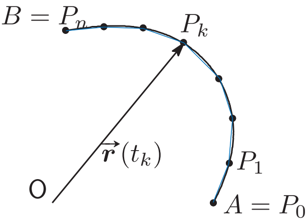
## 曲線

### 曲線の長さ

曲線 $C$ の分点を

$$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$$

とするとき $C$ の長さ $L$ を




$$L = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$$

と定める. lim は分点の間隔を細かくする極限。

# 曲線と線積分

## 曲線

曲線の長さのパラメータによる計算

$C$ のパラメータ表示を

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

とする。ただし $\vec{\boldsymbol{r}}(t)$ は微分可能, $\dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$ は連続で $\mathbf{0}$ にならないものとする。以後 常にこれが成り立つものと仮定する． このとき

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

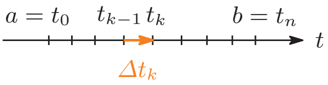
である．成分表示 $\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ を使うと

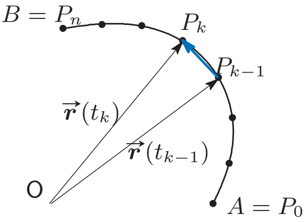
$$= \int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2} dt$$

# 曲線と線積分

## 曲線

[確かめ]




$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_k}=\vec{r}(t_k), \quad k=0,1,\ldots,n$$

とすると

$$|\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}|=\left|\frac{\vec{r}(t_k)-\vec{r}(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\right|(t_k-t_{k-1})\fallingdotseq\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_k)\right|\Delta t_k$$

$$L\fallingdotseq\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t_k)\right|\Delta t_k\to\int_a^b\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt$$

# 曲線と線積分

## 曲線

**弧長パラメータの定義**

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t), \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t_0) \text{ のとき}$$

$$s = \int_{t_0}^{t} \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{d\tau} \right| d\tau = \begin{cases} \text{曲線 AP の長さ} & (t > t_0\text{のとき}) \\ -\text{曲線 AP の長さ} & (t < t_0\text{のとき}) \end{cases}$$

で決まる $s$ を弧長パラメータという。

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| \text{ だから } ds = \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt \quad \text{(線要素とよぶ)}$$

$$\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} \text{ だから } d\vec{\boldsymbol{r}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}\, dt$$

# 曲線と線積分

## 線積分

[スカラー場]

$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \mathbb{R} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & f(\mathrm{P}) \end{array}$$

電位，電荷密度などで現れる。

[ベクトル場]

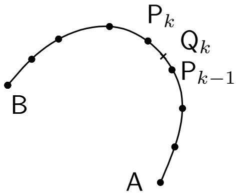
$$\begin{array}{ccc} \text{点} & & \text{ベクトル} \\ \mathrm{P} & \longmapsto & \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P}) \end{array}$$

電磁場，流体の速度場などで現れる。

# 曲線と線積分

## 線積分

### スカラー場の線積分の定義




曲線 $C$ 上のスカラー場 $\mathrm{P} \mapsto f(\mathrm{P})$ の線積分を

$$\int_C f(\mathrm{P})\,ds = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\mathrm{Q}_k)\, \overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$$

で定める。ただし

$\mathrm{A} = \mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ : $C$ の分点,
$\mathrm{Q}_k$ : $C$ の $\mathrm{P}_{k-1}$ から $\mathrm{P}_k$ までの部分に含まれる点
$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ : $\mathrm{P}_{k-1}$ から $\mathrm{P}_k$ までの弧長.
$\lim$ は分割を細かくする極限

スカラー場 の線積分は, 区間 $[a, b]$ 上の関数の定積分を曲線上に拡張したもの。
(ただし $a < b$ とする。)

# 曲線と線積分

## 線積分

**パラメータ表示によるスカラー場の線積分の計算**

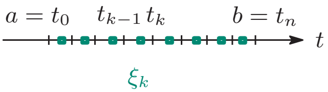
$$C : \overrightarrow{\mathsf{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,$$
$$\overrightarrow{\mathsf{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a), \quad \overrightarrow{\mathsf{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

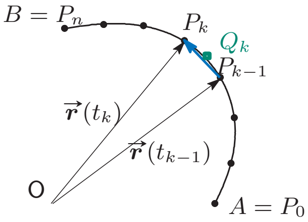
$$\Rightarrow \quad \int_C f(\mathsf{P})\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \left| \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right| dt$$

# 曲線と線積分

## 線積分

[確かめ]




$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

$$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}_k = \vec{r}(t_k), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}_k = \vec{r}(\xi_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

とすると $f(P) = f(\vec{r}(t))$ と書いて

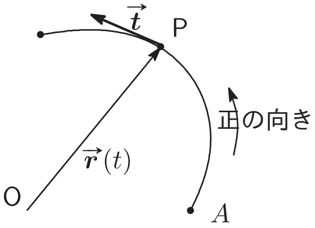
$$\overset{\frown}{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \fallingdotseq |\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}| = \left| \frac{\vec{r}(t_k) - \vec{r}(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| (t_k - t_{k-1}) \fallingdotseq \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}(\xi_k)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(\xi_k) \right| \Delta t_k \to \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

# 曲線と線積分

## 線積分

[曲線の向き付け]




曲線
$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t)$
に向きを付ける。

この向きと, $t$ が増加するとき P の動く向きが一致するとき, $t$ を正のパラメータという。

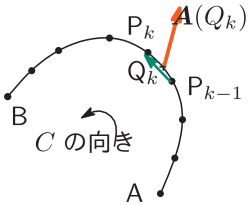
$\vec{\boldsymbol{t}} = \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \div \left| \dfrac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} \right|$

を正の単位接ベクトルという。以後 $t$ は正のパラメータとする。

# 曲線と線積分

## 線積分

### ベクトル場の線積分の定義




曲線 $C$ 上の, ベクトル場 $\mathrm{P} \mapsto \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{P})$ の線積分を

$$\int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \quad \cdots (\star)$$

で定める。(記号はスカラー場の場合と同じ)

# 曲線と線積分

## 線積分

**パラメータ表示によるベクトル場の線積分の計算**

$$C : \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ a \leqq t \leqq b,\ \text{正のパラメータ}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\boldsymbol{r}}(a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\boldsymbol{r}}(b)$$

$$\Rightarrow \int_C \vec{\boldsymbol{A}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}} = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\, dt = \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \vec{\boldsymbol{t}}\, ds$$

[確かめ]　前と同じ記号で

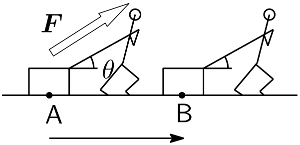
$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \frac{\varDelta \vec{\boldsymbol{r}}_k}{\varDelta t_k} \varDelta t_k \fallingdotseq \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\varDelta t_k,\quad \vec{\boldsymbol{A}}(\mathrm{Q}_k) = \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k))$$

$$(\star)\ \text{の右辺} \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(\xi_k)) \bullet \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}(\xi_k)\varDelta t_k \to \int_a^b \vec{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{r}}(t)) \bullet \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\, dt$$

# 曲線と線積分

## 線積分

[力の場での仕事]　空間の点 P に対して力 $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ が決まるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ を力の場という. 力の場 $\vec{\boldsymbol{F}}$ の中で曲線 $C$ に沿って物体を移動させるとき, $\vec{\boldsymbol{F}}$ のする仕事 $W$ を定める.




$\vec{\boldsymbol{F}}$ : 定ベクトル. $C$ : 線分 AB (A から B へ向き付ける) の場合。
$\vec{\boldsymbol{F}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ のなす角を $\theta$ とするとき

$$W = |\vec{\boldsymbol{F}}|\,\mathrm{AB}\,\cos\theta = \vec{\boldsymbol{F}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

一般の場合。$C$ を折れ線 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\ldots\mathrm{P}_n$ で近似して各線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ 上では $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{P})$ は 定ベクトル $\vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k)$ で近似して, $W$ を

.

$$W = \lim \sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}(\mathrm{Q}_k) \bullet \overrightarrow{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \int_C \vec{\boldsymbol{F}} \bullet d\vec{\boldsymbol{r}}$$

と定める.