本日やること

1. 2 変数関数
   - 2 変数関数とは何か
   - 2 変数関数のグラフ
   - 偏微分係数・偏導関数
   - 偏微分係数の図形的意味
   - 合成関数の微分法
   - 極座標

2 変数関数

定義

[復習：1 変数の関数 f]

実数に対して実数を対応させる働き

$$f : x \mapsto y$$
$$y = f(x)$$

例： $y = x + 1,$
$y = x^2,$
$y = \sin x,$

[2 変数の関数 f]

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f : (x, y) \mapsto z$$
$$z = f(x, y)$$

例：縦横の長さがそれぞれ x, y である長方形について

$\ell = 2(x + y),$ 周の長さ
$S = xy,$ 面積
$r = \sqrt{x^2 + y^2},$ 対角線の長さ
$\vdots$

2 変数関数

定義

[n 変数の関数 f]

n 個の実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f \ : \ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto z$$
$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ ：独立変数 z ：従属変数

$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が定義される $\}$: 定義域

$f(D) = \{f(x_1, x_2, \cdots, x_n) | (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D\}$: 値域

2 変数関数

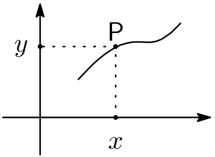
グラフ

[復習：1 変数関数のグラフ]

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフとは

$$\{(x, y) \,|\, y = f(x), x \in D\}$$

のこと。(D は定義域)



点 P(x, y) がグラフ上にある $\iff$ $y = f(x)$

f が連続関数ならば曲線となる。

2 変数関数

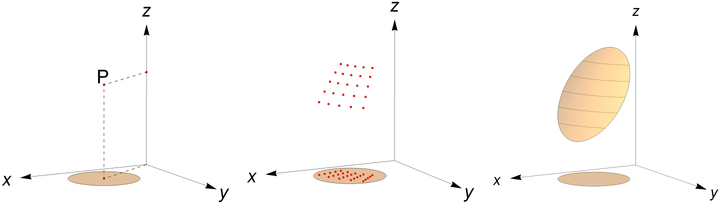
グラフ

2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

のこと。(D は f の定義域)



P(x, y, z) が
グラフ上
$\Updownarrow$
$z = f(x, y)$

多くの場合曲面になる。

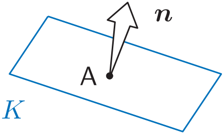
2 変数関数

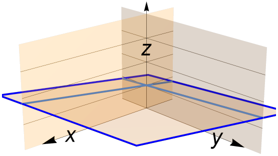
平面と 1 次関数

2 変数の 1 次関数のグラフ

(i) 1 次関数 $f(x, y) = ax + by + c$ (a, b, c は定数) のグラフは平面である。

(ii) この平面はベクトル $\boldsymbol{n} = (a, b, -1)$ に垂直であり, x 方向傾きは a, y 方向傾きは b である。

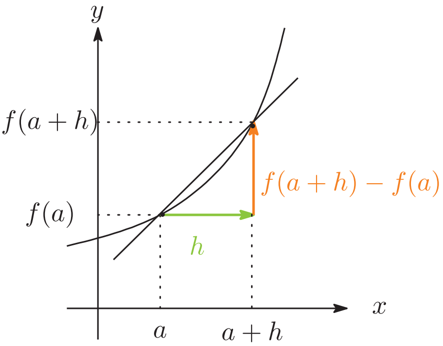




2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[復習：1 変数関数の微分係数]



$y=f(x)$：1 変数関数　a：定数
のとき

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

：a における微分係数

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏微分係数の定義

$z = f(x,y)$ を 2 変数関数, A(a,b) を定点とするとき, 2 変数関数 $z = f(x,y)$ は点 A(a,b) で x に関して偏微分可能であるとは

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \quad \cdots(\star)$$

が存在すること。
$(\star)$ を点 A$(a.b)$ における $f(x,y)$ の x に関する偏微分係数とよび, 記号

$$f_x(a,b),\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b),\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)},\cdots$$

で表す。

y に関する偏微分係数も同様に定める。

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\clubsuit)$$

と

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \cdots (\star)$$

を比較すると,

$(\star)$ は y を定数 b に固定して, $f(x, b)$ を x のみの 1 変数関数とみて微分したもの

ということができる。

2 変数関数
偏微分係数・偏導関数

2 変数関数の偏導関数の定義

(i) 関数 $z = f(x, y)$ が集合 D の各点で偏微分可能であるとき，D で偏微分可能であるという．

(ii) $(x, y) \in D$ に対して微分係数 $f_x(x, y)$ が決まるが，これによって決まる関数

$$(x, y) \mapsto f_x(x, y)$$

を $z = f(x, y)$ の x に関する偏導関数と呼び，記号

$$f_x(x, y), \quad \big(f(x, y)\big)_x, \quad f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

などで表す． y に関する偏導関数も同様に定める。

(iii) 偏導関数を求めることを偏微分するという．

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1.]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ $(a,\ b$ は定数$)$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき 正解は？

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + 2y\ ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + y + y^2\ ?$$

$$f_x(x, y) = 2x + 1 + y^2\ ?$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 1 の正解]

(1) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ のとき

$$f'(x) = (x^2)' + 3(x)' + (2)' = 2x + 3 + 0.$$

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) のとき

$$f'(x) = (x^2)' + a(x)' + (b)' = 2x + a + 0.$$

(3) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき y を定数と見て x で微分して

$$f_x(x, y) = (x^2)_x + (x)_x y + (y^2)_x = 2x + y + 0.$$

(3)' $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ のとき x を定数と見て y で微分して

$$f_y(x, y) = (x^2)_y + x(y)_y + (y^2)_y = 0 + x + 2y.$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

偏微分法では, 1 変数関数の微分法の計算方法がすべて使える.

[例 2.] 合成関数の微分法が使える.

合成関数の微分法を復習しよう。

記号 $f'(x)$ のかわりに $\dfrac{d}{dx}f(x)$ を使う。同じ意味！。

(1) $f(x) = (2x+3)^4$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(2x+3)^4 \\
&= \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^4 \times \frac{d}{dx}(2x+3) \\
&= 4t^3 \times 2 = 8(2x+3)^3
\end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

(2) $f(x,y)=(2x+3y)^4$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \left((2x+3y)^4\right)_x \\ &= \left(t^4\right)_x = \left(t^4\right)_t \times t_x \\ &= \left(t^4\right)_t \times (2x+3y)_x = 4t^3 \times 2 = 8(2x+3y)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \left((2x+3y)^4\right)_y \\ &= \left(t^4\right)_y = \left(t^4\right)_t \times t_y \\ &= \left(t^4\right)_t \times (2x+3y)_y = 4t^3 \times 3 = 12(2x+3y)^3 \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 3.]

(1) $f(x) = \sin(2x+3)$ のとき $2x+3=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\sin t \times \frac{d}{dx}(2x+3) = 2\cos(2x+3)$$

(2) $f(x,y) = \sin(2x+3y)$ のとき $2x+3y=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\sin(2x+3y))_x = (\sin t)_x \\ &= (\sin t)_t \times t_x = (\sin t)_t \times (2x+3y)_x = \cos t \times 2 = 2\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\sin(2x+3y))_y = (\sin t)_y \\ &= (\sin t)_t \times t_y = (\sin t)_t \times (2x+3y)_y = \cos t \times 3 = 3\cos(2x+3y) \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 4.] 積の微分法を使うことができる.

(1) $f(x,y) = xy\sin(2x+3y)$ のとき 積の微分法により

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (xy)_x \sin(2x+3y) + xy\left(\sin(2x+3y)\right)_x \\ &= y\sin(2x+3y) + xy\left(2\cos(2x+3y)\right) \\ &= y\sin(2x+3y) + 2xy\cos(2x+3y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (xy)_y \sin(2x+3y) + xy\left(\sin(2x+3y)\right)_y \\ &= x\sin(2x+3y) + xy\left(3\cos(2x+3y)\right) \\ &= x\sin(2x+3y) + 3xy\cos(2x+3y). \end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数・偏導関数

[例 5.] 重要!！ 距離を表す関数

(1) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ のとき $x^2+1=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{t}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\times\frac{d}{dx}(x^2+1)=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

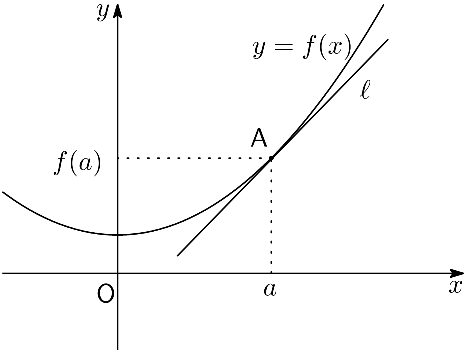
(2) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ のとき $x^2+y^2=t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_x\\&=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times t_x=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times(x^2+y^2)_x=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\f_y(x,y)&=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_y\\&=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times t_y=\left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t\times(x^2+y^2)_y=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}$$

2 変数関数

偏微分係数の図形的意味

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]



A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾きは $= f'(a)$

だから接線の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f'(a)$$

2 変数関数

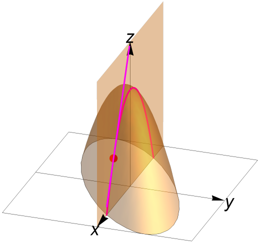
偏微分係数の図形的意味

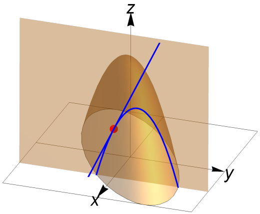
偏微分係数の図形的意味

$f(x,y)$ が偏微分可能であるとき, $z=f(x,y)$ のグラフの曲面において

A$(a,b,f(a,b))$ における x 方向接線の傾き $=f_x(a,b)$,

A$(a,b,f(a,b))$ における y 方向接線の傾き $=f_y(a,b)$.





2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i) $z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "t_x"] & & \\
& t \arrow[r, "z_t"] & z \\
y \arrow[ur, "t_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例] $z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y \cos(xy)$$

2 変数関数

合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ t \arrow[ur, "x_t"] \arrow[dr, "y_t"'] & & z \\ & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

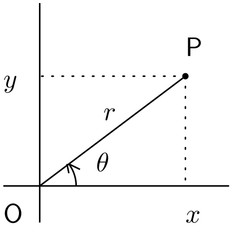
$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "x_u"] \arrow[ddr, "y_u"] & x \arrow[dr, "z_x"] & \\ & & z \\ v \arrow[r, "y_v"'] \arrow[uur, "x_v"] & y \arrow[ur, "z_y"'] & \end{tikzcd}$$

2 変数関数

平面の極座標

平面の極座標



平面の点 P に対して

(x, y)

を P の直交座標 という。

r : 原点 O と点 P の距離,

θ : 線分 OP と x 軸の正の部分とのなす角

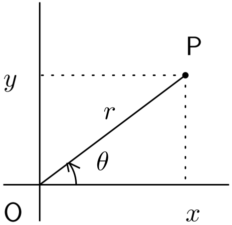
とするとき

(r, θ)

を P の極座標 という。

2 変数関数
平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 1



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だから

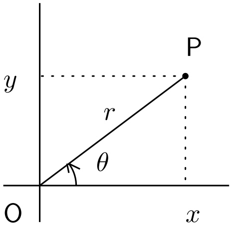
$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 2



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

だから

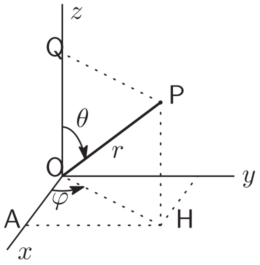
$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos\theta \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

2 変数関数

空間の極座標

空間の極座標



空間の点 P(x, y, z) に対し

H$(x, y, 0)$，A$(x, 0, 0)$，Q$(0, 0, z)$

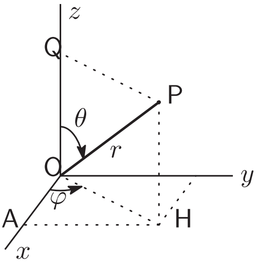
OP $= r$，∠QOP $= \theta$，∠AOH $= \varphi$

とするとき (r, θ, φ) を P の**極座標**という。

2 変数関数

空間の極座標

空間の極座標と直角座標の関係



このとき

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \end{cases}$$

だから

$$x_r = \sin\theta\cos\varphi \qquad x_\theta = r\cos\theta\cos\varphi \qquad x_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi$$

$$y_r = \sin\theta\sin\varphi \qquad y_\theta = r\cos\theta\sin\varphi \qquad y_\varphi = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$z_r = \cos\theta \qquad z_\theta = -r\sin\theta \qquad z_\varphi = 0$$