# 本日やること

1. 積分法
   - 原始関数と不定積分
   - 不定積分の置換積分法
   - 不定積分の部分積分法
   - 定積分の考え方
   - 定積分の定義
   - 定積分の性質
   - 微分と積分の関係
2. 応用

# 積分法

## 初めに

[積分とは何か]

微分と逆の演算

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\text{微分}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\text{積分}"] \end{tikzcd}$$

[目的]

1. 微分方程式を解くこと。(不定積分)
2. 面積・体積・質量の計算。　道のりの計算 (定積分)

( 逆に　密度の計算　速度の計算は微分法であった　)

# 積分法

## 原始関数

**原始関数の定義**

$F(x)$ が $f(x)$ の**原始関数** $\iff$ $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$

[注意] $f(x)$ の原始関数は無数にあり，その 1 つを $F(x)$ で表すと，そのほかの原始関数 $G(x)$ は適当な定数 $C$ を用いて $F(x) + C$ で表される．

**不定積分の定義**

$f(x)$ の 原始関数の 1 つを $F(x)$ とし，$C$ を任意の定数とするとき，$F(x) + C$ を $f(x)$ の**不定積分**とよび

$$\int f(x)\,dx$$

で表す。定数 $C$ を**積分定数**という．不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**という．

# 積分法

## 不定積分

まとめると

**微分と不定積分の関係**

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

無数の原始関数を象徴的に 1 つの式で表したものと思ってほしい。

# 積分法

**主な関数の不定積分**

(i) $$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1)$$

(ii) $$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

(iii) $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C \quad \left(\Leftrightarrow \frac{d}{dx}e^{x} = e^{x}\right)$$

(iv) $$\int \sin x\,dx = -\cos x + C = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x\right)$$

(v) $$\int \cos x\,dx = \sin x + C = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

$$\left(\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x\right)$$

今後積分定数 $C$ は省略することにする.

# 積分法

## 不定積分の性質：線形性

### 不定積分の性質：線形性

(i) $\displaystyle \int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

(ii) $\displaystyle \int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ （$k$ は定数）

# 積分法

## 不定積分の置換積分法

**定理：不定積分の置換積分法**

(i) 関数 $f(x)$ が原始関数をもち, $t = \varphi(x)$ が微分可能であるとき

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

(ii) $x = \psi(t)$ が微分可能であるとき

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

(i), (ii) により $x$ の関数の $x$ による積分を $t$ の関数の $t$ による積分に置き換えること,(あるいはその逆) を積分変数の変換または置換積分法という。
(ii) は (i) で $x$ を $t$ に, $\varphi$ を $\psi$ に置き換えたもの。

# 積分法

## 不定積分の置換積分法

[置換積分法の考え方] (i) も (ii) も次のことをしている。

(I) $t=\varphi(x)$ または $x=\psi(t)$ となる変数 $t$ を考え,
$\varphi(x)$ を $t$ で, または $x$ を $\psi(t)$ でおきかえる。

(II) (i) の場合 $t=\varphi(x)$ を $x$ で微分して $\dfrac{dt}{dx}=\varphi'(x)$, 両辺に $\frac{dx}{\varphi'(x)}$ をかけて
$dx=\dfrac{dt}{\varphi'(x)}$,

(ii) の場合 $x=\psi(t)$ を $t$ で微分して $\dfrac{dx}{dt}=\psi'(t)$, 両辺に $dt$ をかけて
$dx=\psi'(t)dt$,

(III) 以上により $x$, $dx$ を $t$, $dt$ でおきかえる。

このおきかえで $\displaystyle\int (t$ の関数$)\,dt$ の形になると, 積分がうまくいく場合がある。

# 積分法

## 不定積分の置換積分法

[例 1] $\displaystyle\int e^{3x}\,dx$ を計算する。

$3x = t \cdots ♠$

とおく。両辺 $x$ で微分して

$$3 = \frac{dt}{dx}$$

両辺 $\frac{dx}{3}$ をかけて

$$dx = \frac{dt}{3} \cdots ♡$$

♠, ♡ で置き換えて

$$\int e^{(3x)}\,dx = \int e^{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^{t}\,dt = \frac{1}{3}e^{t} = \frac{e^{3x}}{3}$$

# 積分法

## 不定積分の部分積分法

**定理：不定積分の部分積分法＝積の積分法**

$f(x)$, $g(x)$ ：共に微分可能， $f'(x)$, $g'(x)$ ： 共に連続であるとき

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

# 定積分法

## 初めに

[復習：不定積分]

$$\int f(x)\,dx = F(x)\,(+C) \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

[定積分:高校での定義]

$f(x)$ の $a$ から $b$ までの定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

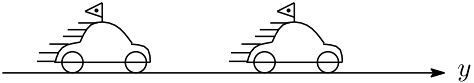
によって 高校では 定めたのであった. $\longrightarrow$ $\displaystyle\int f(x)\,dx$ が計算できないとき困るので, 原始関数を用いない定義を考える.

# 定積分法

## 導入

動点の時刻 $t$ での座標を $y = f(t)$ とする.

時刻 $\quad t \quad t+h$




座標 $\quad f(t) \quad f(t+h)$

このとき

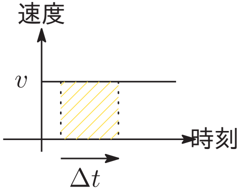
$$(\text{時刻 } t \text{ の}) \text{ 瞬間の速度 } v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{dy}{dt}$$

今回は逆に $v(t)$ から位置の変化 $f(b) - f(a)$ を知りたい.

# 定積分法

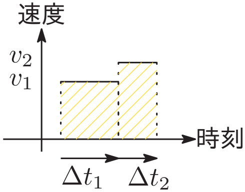
## 導入

[$v =$ 一定の場合]　($v \geqq 0$ とする)




位置の変化量 $= v \times \Delta t =$ □ の面積

[$v$ が変化する場合]

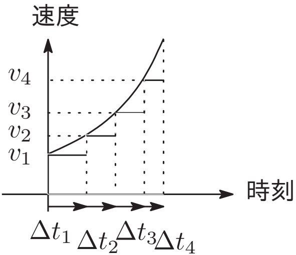


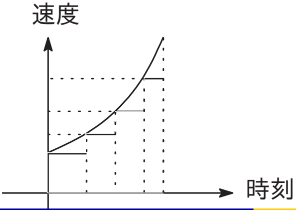

位置の変化量 $= v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 =$ □ の面積

# 定積分法

## 導入

[$v$ が連続的に変化する場合]




位置の変化量

$$\fallingdotseq v_1\,\Delta t_1 + v_2\,\Delta t_2 + v_3\,\Delta t_3 + v_4\,\Delta t_4$$

$=$ □の面積

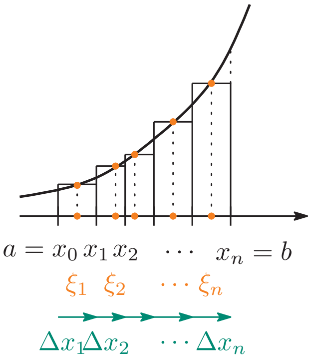
$\downarrow$

□の面積

# 定積分法

## 定積分の定義

この考え方に沿って定積分を定義する.




$y = f(x)$ : 関数　$a < b$ とし,

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
: 区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \ k = 1, \cdots, n$
: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ k = 1, \cdots, n$
: 小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする.

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という.

# 定積分法

## 定積分の定義

### 定積分の定義 (I)

$$\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

が $\{x_k\}$, $\{\xi_k\}$ の取り方によらず存在するとき, $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で積分可能であるという. この極限を $f(x)$ の $a$ から $b$ までの定積分とよび, $\int_a^b f(x)\,dx$ で表す. つまり

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

である. $a$ を積分の下端, $b$ を上端という.

# 定積分法

## 定積分の定義

**定積分の定義 (II)**

$a$ を下端, $b$ を上端とするとき, $a > b$ の場合も $(\star)$ で定義する．ただしこのとき

$$\mathcal{P} : a = x_0 > x_1 > \cdots > x_n = b$$
$$x_{k-1} \geqq \xi_k \geqq x_k, \ \ k = 1, \cdots, n$$
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} ( \leqq 0), \ \ k = 1, \cdots, n$$

である．

したがって

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

# 定積分法

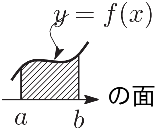
## 定積分の性質

**定積分の大事なこと**

(I) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a,b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$




の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 $t$ での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$$\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$$ (時刻 $a$ から $b$ までの位置の変化量)

# 定積分法

## 定積分の性質

### 定積分の性質

(i) $\displaystyle \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(y)\,dy$

(ii) $\displaystyle \int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $\displaystyle \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ (ただし $k$ は $x$ によらない定数)

# 定積分法

## 定積分の性質

### 定積分の性質 (続き)

(iv) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(v) 区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq \int_a^b g(x)\,dx$

特に，$f(x) \geqq 0$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$

(vi) $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,dx$$ (ただし $a < b$ の場合)

# 定積分法

## 微分と積分の関係

[目標]

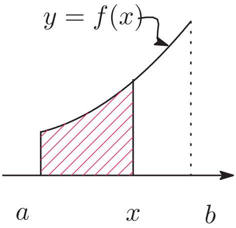
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \text{ただし } F(x) \text{ は } f(x) \text{ の原始関数}$$

高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

# 定積分法

## 微分と積分の関係

**微分積分学の基本定理**




$f(x)$ : $[a,b]$ で連続

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ とおくと $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数になっている．つまり連続関数は原始関数を持つといってよい．

# 定積分法

## 微分と積分の関係

**定積分と原始関数の関係**

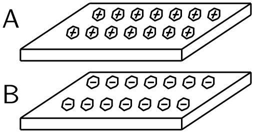
$f(x)$ : $[a,b]$ で連続

$F(x)$ : $f(x)$ の原始関数

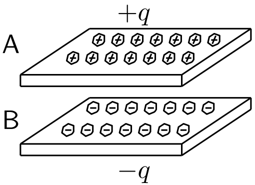
$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \Big( \text{これを} = \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く} \Big)$$

# 応用

[コンデンサーの放電]




平行に置かれた 2 枚の金属板に電荷をためることができる。
この状態で B から A に単位電荷を運ぶためには (電気力に逆らって電荷を運ばなくてはならないので）仕事が必要。
この仕事の量を AB 間の**電位差**といい, $V$ で表す。(単位はボルト)

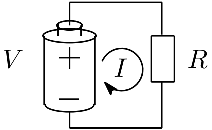



A の電荷を $+q$(クーロン), B の電荷を $-q$(クーロン) とする。
電位差 $V$ は $q$ に比例するから

$$q = CV \cdots (\star 1)$$

この比例定数 $C$ を**静電容量**という。

# 応用

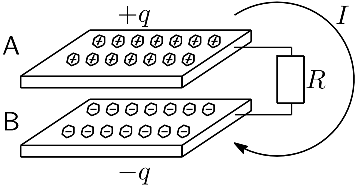



電位差 $V$ のある 2 点を抵抗 $R$ でつなぐと電流 $I$ が流れる。その関係は

$$V = I\,R \cdots (\star 2)$$

電池は電荷が無制限にあるので，電位差を保ったままいつまでも電流が流れ続ける（と考える）。

# 応用




電荷を帯びた金属版を抵抗 $R$ でつなぐと電流 $I$ が流れる．$I$ は A から B の向きに測ることにする。

[1]．電位差 $V$ に応じて $I$ が (微小時間) 流れる

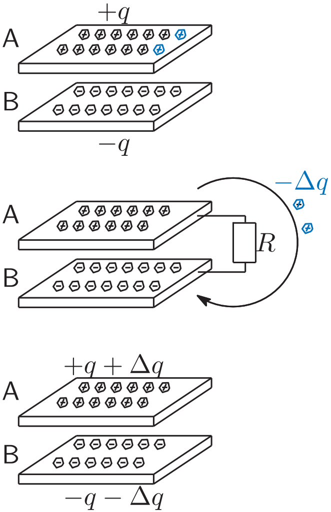
[2]．その結果電荷 $q$ が微小に失われる

[3]．その結果電位差 $V$ が微小に減少する

以上の [1], [2], [3] が繰り返し起こる。これが連続的に起こったらどうなるか調べたい。

$q$, $V$, $I$ は時刻 $t$ の関数となるので，$q(t)$, $V(t)$, $I(t)$ と書く。

# 応用




この $I(t)$ を計算しよう。
$t$ から $t+\Delta t$ までの A の電荷 $q(t)$ の変化量は

$$\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t) \ (< 0)$$

またこのときの A から B への電荷の移動量は電流が流れる分だけ電荷が減少するのであるから $-\Delta q$ である。
1 秒間に 1 クーロンの電荷が流れるとき 1 アンペアの電流というのであるから

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} \fallingdotseq -I(t)$$

# 応用

$\Delta t \to 0$ とする極限をとって

$$\frac{dq}{dt} = -I(t) \cdots (\star 3)$$

$(\star 1)$, $(\star 2)$, $(\star 3)$ をまとめて

$$-I(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dV}{dt} = CR\frac{dI}{dt}$$

$$CR\frac{dI}{dt} + I(t) = 0 \cdots (\star 4)$$

この $(\star 4)$ のような未知の関数 $I(t)$ とその導関数の関係式を微分方程式という。

# 応用

この $(\star 4)$ を満たす関数 (これを微分方程式の解という) を $I = ke^{zt}$ ($z$ は定数) とおくことによって解こう。$(\star 4)$ に代入して

$$CRkze^{zt} + ke^{zt} = 0$$

これを解いて $z = -\dfrac{1}{CR}$ だから $I(t) = ke^{-\frac{t}{CR}}$. $t = 0$ を代入して $k = I(0)$。以上から

$$I(t) = I(0)e^{-\frac{t}{CR}}$$