本日やること

1. 微分係数・導関数
   - 微分係数・導関数の定義
   - 定数倍・和・積・商の微分法
   - 合成関数の微分法
   - 指数関数の導関数
   - 対数の定義・性質
   - 三角関数の導関数
   - 複素指数関数の導関数

微分係数・導関数

微分係数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x=a$ で (または点 a で) 微分可能であるとは

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdots(\star) \text{ が存在すること}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x=a$ におけるまたは点 a における微分係数といい，

$$f'(a),\quad \frac{df}{dx}(a),\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a},\cdots \text{で表す．つまり}$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは，区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を，関数 $f(x)$ の導関数といい，記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す．つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

べき関数の導関数

べき関数の導関数

$f(x) = x^{\alpha}$ (α は定数) のような関数をべき関数という。べき関数の導関数は

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad \alpha\text{は実数の定数}$$

[例]

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = (-1)x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$$

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

微分係数・導関数

定数倍・和・積・商の微分法

定数倍・和の微分法

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能，　k ：定数　$\Rightarrow$　$kf(x)$, $f(x)+g(x)$ も微分可能で

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

積・商の微分法

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能

$\Rightarrow$　$f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$　(積の微分法)

(ii) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$　(商の微分法)

微分係数・導関数

合成関数の微分法

[問題]:

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ のとき,

$$f'(x) = (2x+3)^5 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(x^2 + 3x + 2)^4 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(2x+3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

微分係数・導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$y = f(g(x)), \quad x \in X$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{g} & t & \xrightarrow{f} & y \\ & t = g(x) & & y = f(t) & \end{array}$$

で決まる関数 $x \mapsto y$ を f, g の合成関数という.

[例]

$y = f(t)$, $t = g(x)$ の合成関数は $y = f(g(x))$.

$y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = (x^2 + 3x + 2)^5$.

$y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

$y = \sin t$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数は $y = \sin(x^2 + 3x + 2)$.

微分係数・導関数
合成関数の微分法

定理 4.7. 合成関数の微分法

$y = f(t)$, $t = g(x)$ ：微分可能 $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： 微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \left(\text{または}\ (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\right)$$

[確かめ]　導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t} \quad \left(= \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)$$

$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \quad \left(= \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

である。

微分係数・導関数

合成関数の微分法

x の増分 Δx に対し

$g(x+\Delta x)-g(x)=\Delta t$,

$f(t+\Delta t))-f(t)=\Delta y$

$$x \xmapsto{g} t \xmapsto{f} y$$

増分:Δx　増分:Δt　増分:Δy

とおくと

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad \frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \qquad \frac{dt}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)$$

であり

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\Delta y}{\Delta x} & = & \dfrac{\Delta y}{\Delta t} & \times & \dfrac{\Delta t}{\Delta x} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{dy}{dx} & = & \dfrac{dy}{dt} & \times & \dfrac{dt}{dx}
\end{array}$$

微分係数・導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ の導関数を求める。

$y = f(x)$, $t = x^2 + 3x + 2$ とおく.

関数 $y = (x^2 + 3x + 2)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5\,t^4 \times (2x + 3) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$$

である.

微分係数・導関数

指数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

対数関数

対数の定義

対数の定義

a を $a>0$, $a\neq 1$ を満たす定数とする．このとき，正の数 M に対して

$$a^p = M$$

となる実数 p がただ 1 つ存在する．この p を

$$p = \log_a M, \quad M > 0$$

と表し，a を底とする M の対数という．また，M を真数と呼ぶ．つまり

$$p = \log_a M \quad \Longleftrightarrow \quad a^p = M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \ ①$$

である．$\log_a M$ はログ底 a の M と読む．

底の条件：$a>0$, $a\neq 1$，真数条件：$M>0$ に注意すること。

対数関数

対数の性質

対数の性質

a, b : 1 でない正の数, $M>0$, $N>0$, k, x, p を実数とするとき

(i) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

(ii) $\log_a\left(\dfrac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(iii) $\log_a\left(M^k\right) = k\log_a M$

(iv) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$　(底の変換公式)

すべて指数法則を対数の言葉で言い換えたものである。

微分係数・導関数

自然対数

自然対数・常用対数

$\log_e x$ は 自然対数と呼ばれ, 記号

$$\log x \text{ あるいは } \ln x$$

で表す.

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ.

微分係数・導関数

指数関数の導関数

指数関数の導関数

e^x は微分可能であり

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]

$$\frac{1}{h}(e^{x+h} - e^x) = \frac{1}{h}(e^h - 1)e^x$$

$e^h - 1 = t$ とおくと $e^h = 1 + t$ だから両辺自然対数をとって $h = \log(1+t)$

$$= \frac{t}{\log(1+t)}e^x = \frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}e^x$$

$h \to 0$ とすると $t \to 0$ だから $(1+t)^{\frac{1}{t}} \to e$ で

$$\to \frac{1}{\log e}e^x = e^x$$

微分係数・導関数

指数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax} \quad (a$; 定数)

(ii) $(a^x)' = a^x \log a \quad (a$: 1 でない正の定数)

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

左辺 $= \dfrac{d}{dx}e^{ax} = \dfrac{d}{dt}e^t \times \dfrac{dt}{dx}$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$= e^t \times a = a\, e^{ax} =$ 右辺.

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x \log a}$. これと (i) により

左辺 $= e^{x \log a} \log a =$ 右辺

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

微分係数・導関数

三角関数の導関数

[目標]

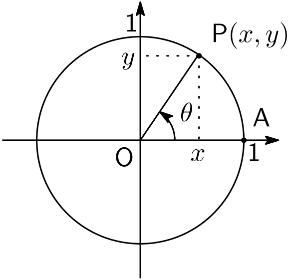
(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

微分係数・導関数

三角関数の導関数

復習　三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1,0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x,y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

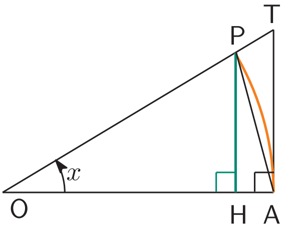
また，これらによって定められる関数 $f(\theta)=\sin\theta$ 等を三角関数という．

微分係数・導関数

三角関数の導関数

三角関数の基本極限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



[確かめ] $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $x \to +0$ とする.

PH$= \sin x$,　弧 $\overset{\frown}{\text{PA}}$$= x$,　TA $= \tan x$

△OPA, 扇型 OPA, △OTA の面積を比較

$$0 < \frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x \quad \left(= \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

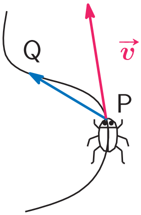
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\cos x \to 1$ であるからはさみうちの原理により $\frac{\sin x}{x} \to 1$　$x \to -0$ の場合も同様.

微分係数・導関数

三角関数の導関数

運動する点の速度ベクトルの定義・性質



平面の動点の軌跡は曲線となる。
時刻 t のとき P, 時刻 $t+h$ のとき Q
とするとき時刻 t のときの P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。次の性質がある。

(i) $\vec{v}(t)$ の向きは曲線の接線方向

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは動点の速度

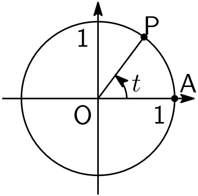
(iii) P の座標を $(x(t), y(t))$ とすると

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$$

微分係数・導関数

三角関数の導関数

等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t = 0$ のとき P=A

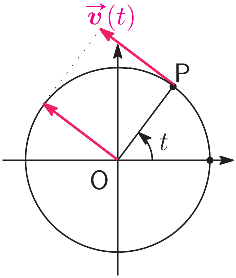
ならば

時刻 t の P の座標 $= (\cos t, \sin t)$

微分係数・導関数

三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル

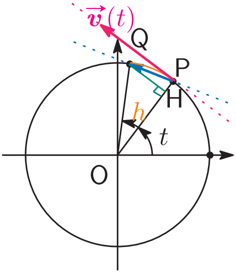


原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している点 P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ は

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star)\end{aligned}$$

微分係数・導関数

三角関数の導関数



[確かめ] (i) $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で正の回転の向きである．なぜなら直線 PQ は $h \to 0$ のとき接線に近づくから。

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは 1 である．なぜなら

$$\frac{\mathrm{QH}}{h} = \frac{\sin h}{h} \leqq \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}\right| \leqq \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{h} = 1$$

かつ $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ だから。

(i), (ii) より $\vec{v}(t)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから $(\star)$ がわかる．

微分係数・導関数

三角関数の導関数

三角関数の導関数

(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[確かめ]　前節より明らか。

微分係数・導関数

複素指数関数

複素指数関数の導関数

z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, 複素数値をとる関数 $f(t) = e^{zt}$ の導関数は

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

微分係数・導関数

複素指数関数

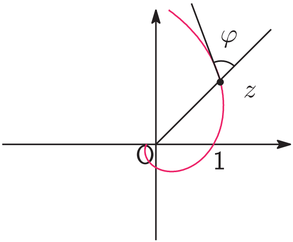
[確かめ] $z = x + iy$ とおく。$e^{zt} = e^{xt}(\cos(yt) + i\sin(yt))$ だから

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= (e^{xt}\cos yt)' + i(e^{xt}\sin yt)' \\
&= (e^{xt})'\cos yt + e^{xt}(\cos yt)' + i(e^{xt})'\sin yt + i(e^{xt})(\sin yt)' \\
&= xe^{xt}\cos yt - ye^{xt}\sin yt + ix(e^{xt})\sin yt + iye^{xt}\cos yt \\
&= e^{xt}(x\cos yt - y\sin yt + xi\sin yt + iy\cos yt) \\
&= e^{xt}\left\{(x+iy)\cos yt + (ix-y)\sin yt\right\} \\
&= (x+iy)e^{xt}(\cos yt + i\sin yt) \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

微分係数・導関数

複素指数関数

対数らせん



$z = e^{(a+ib)t}$, $(a,\ b$ は実数の定数) の軌跡を対数らせんという。

対数らせんの接線は Oz とつねに一定の角で交わる。

[確かめ] $r = |a+ib|$, $\varphi = \arg(a+ib)$ とおくと, $a+ib = re^{\varphi i}$ であり,

$$\frac{d}{dt}e^{(a+ib)t} = (a+ib)e^{(a+ib)t} = re^{\varphi i}e^{(a+ib)t}$$

だから 回し伸ばしの原理より $\frac{d}{dt}e^{(a+ib)t}$ は Oz を φ だけ回転し, r 倍したもの。

微分係数・導関数

複素指数関数