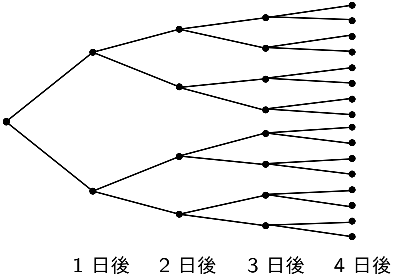
本日やること

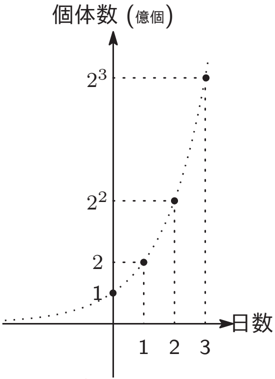
1. 指数関数
   - 微生物の増殖
   - 定数倍変化と指数法則
   - 実数べき
   - 指数関数の定義・性質
2. 三角関数
   - 弧度法
   - 回転の角
   - 定義
3. 複素指数関数

指数関数

微生物の増殖

[増殖と指数関数] 分裂により個体数が 1 日で 2 倍になる微生物がある。





初めの個体数
1 (億個)
$\Downarrow$
n 日後の個体数
2^n (億個)

n 日後 2^n 倍となる。
等比数列的変化である。

[本日の目標] 増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

定倍率変化の法則

「1 日で 2 倍に増殖する」 を一歩進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂」するのでその結果 「1 日後に 2 倍になる。」

と考える。

t 日後の個体数を 2^t と書くことにする。

t が一定量 h だけ増加すると, 2^t は t によらず一定の倍率 $u(h)$ で変化するから

$$\frac{2^{t+h}}{2^t} = u(h) \quad (u(t) \text{ は } t \text{ によらない})$$ これを定倍率変化の法則という。

ここで $t = 0$ とおくと $2^0 = 1$ だから $\frac{2^{0+h}}{2^0} = 2^h$ より $2^{t+h} = 2^t 2^h$。 つまり

指数法則

定倍率変化の法則は指数法則

$$2^{t+s} = 2^t 2^s, \quad t, s \text{ は実数} \qquad \cdots\cdots \Diamond$$

とおなじことである。

指数関数

指数法則

[例：t が有理数 $\dfrac{n}{m}$ の場合]

$$t:\ 0 \xrightarrow{+\frac{n}{m}} \frac{n}{m} \xrightarrow{+\frac{n}{m}} \cdots\cdots \xrightarrow{+\frac{n}{m}} n$$

$$2^t:\ 1 \xrightarrow[\times x]{} x \xrightarrow[\times x]{} \cdots\cdots \xrightarrow[\times x]{} 2^n$$

$$2^{\frac{n}{m}} = x \ (n, m = 1, 2, \cdots)$$

とおくと定倍率変化の法則により

$$x^m = 2^n$$

だから

$$x = \sqrt[m]{2^n}$$

同様にして

有理数べき

$$2^0 = 1 \qquad 2^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$2^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \qquad 2^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2$$

指数関数

実数べき

一般の実数べき

$a > 0$, $a \neq 1$ とする。2^t と同様に

$$a^t \quad (t \text{ は実数})$$

が考えられる。これを a を底とする実数べきという。t を指数という。

指数法則に追加

$a > 0$, $b > 0$, t, s は実数のとき

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

指数関数

累乗根を含む式の計算

[最重要：平方根]： $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \dfrac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}$

[例] 累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left(a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{15}{8}}\end{aligned}$$

指数関数

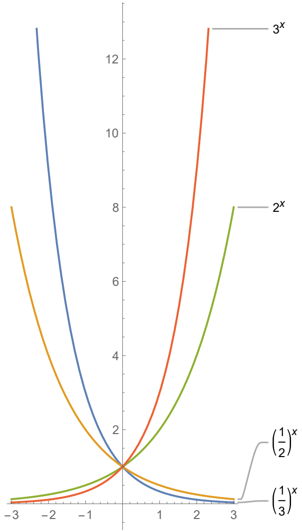
定義

指数関数の定義

$a > 0,\ a \neq 1$ とする．実数べきから作られる関数 $f(x) = a^x$ を，a を底とする x の指数関数とよぶ．
定義域は実数全体である．

指数関数

グラフ



$2, 2^2, 2^3, \cdots \to \infty$　激しく増加。

実数べき 2^x は $2^n, (n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから,

x が増加すると $2^x \to \infty$　(激しく増加)

$\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \cdots \to 0$　(非常に速く)

実数べき $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $\left(\frac{1}{2}\right)^n, (n = 1, 2, \cdots)$ を拡張したものだから,

x が増加すると $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0$　(非常に速く)

指数関数

性質

指数関数の性質

(I) 指数関数 $f(x) = a^x$ の定義域は実数全体 $\mathbb{R}$, 値域は正の実数全体 $(0, \infty)$ である．また，

(i) $1 < a$ のとき狭義単調増加,

(ii) $0 < a < 1$ のとき狭義単調減少.

(II) すべての実数 $t, s \in \mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成り立つ.

$$a^{t+s} = a^t a^s, \quad a^{t-s} = \frac{a^t}{a^s}, \quad a^{ts} = (a^t)^s$$

指数関数

特別な底を持つ指数関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

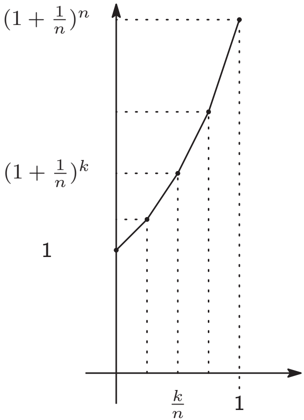
この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

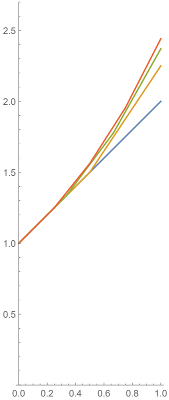
$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

特別な底を持つ指数関数





$n=1 \quad \left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n=2 \quad \left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 2.25$

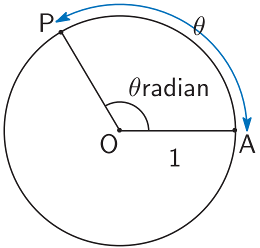
$n=3 \quad \left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3 = 2.37037\cdots$

$n=4 \quad \left(1+\dfrac{1}{4}\right)^4 = 2.44141\cdots$

三角関数

弧度法

弧度法の定義



図のような半径 1 の円において

$\angle AOP = \theta$ radian (ラジアン)

であるとは

円弧 AP の長さ $= \theta$

であること

このような角の大きさのはかり方を弧度法という。普通、θ (rad) と書くが (rad) を省略することもある。

度数法と比較すると,

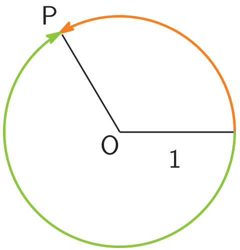
1 回転 $= 360°$, 半径 1 の円の円周の長さ $= 2\pi$ 　だから

$$2\pi \text{ (rad)} = 360°, \quad \pi \text{ (rad)} = 180°, \quad \frac{\pi}{2} \text{ (rad)} = 90°, \cdots$$

三角関数

回転の角

回転の角の定義



P が原点中心半径 1 の円周上を回転しているとき

P の回転の角が θ (rad) であるとは

正の向きの回転のとき $\theta =$(P の軌跡の長さ)
負の向きの回転のとき $\theta = -$(P の軌跡の長さ)

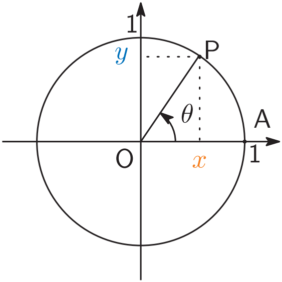
であること．ただし

正の向きの回転：左回り (反時計回り) の回転
負の向きの回転：右回り (時計回り) の回転

三角関数

定義

三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$ ： 余弦

$\sin\theta = y$ ： 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ ： 正接

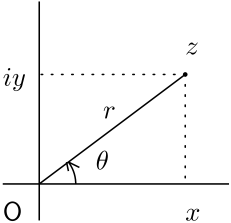
と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という．

複素指数関数

復習：極形式

復習 複素数の極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して

$r =$ 点 z と原点 O の距離,

$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \cdots\cdots ①$$

と表される．これを複素数 z の極形式という．

$r = |z|$: 絶対値,

$\theta = \arg\, z$: 偏角

複素指数関数

復習：回し伸ばしの原理

復習 回し伸ばしの原理

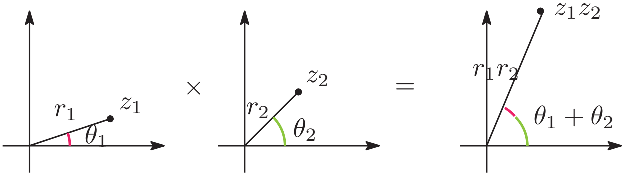
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

(i) $\arg\, z_1 z_2 = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$, $\quad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2$, $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

によって決まる.

(i) は

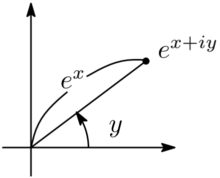


ということ

複素指数関数

定義

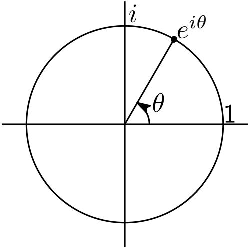
複素指数関数の定義



指数関数 e^x を拡張して複素数 $x + iy$ に対して複素指数関数 e^{x+iy} を

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

で定める。



とくに θ を実数とするとき

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$ Euler の公式

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg e^{i\theta} = \theta$$

複素指数関数

複素指数法則

複素指数法則

任意の複素数 z_1, z_2 に対して

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{(複素指数法則)}$$

[確かめ]　$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $(x_k, y_k,\ k = 1, 2$ は実数 $)$ とすると

$$|e^{z_1}| = e^{x_1},\ \arg(e^{z_1}) = y_1$$

$$|e^{z_2}| = e^{x_2},\ \arg(e^{z_2}) = y_2$$

だから回し伸ばしの原理により

$$|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}||e^{z_2}| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2},$$

$$\arg(e^{z_1}e^{z_2}) = \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2$$

したがって

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$$

複素指数関数

複素指数法則

複素指数関数 e^z は

- 偏角 $\arg(z)$ が 0 のとき，これまでに習った指数関数に一致する。
- 複素指数法則が成り立つ。

であることにより，これまでに習った指数関数の拡張であると考えてよい。