今後のプラン・本日やること

5 回分の目標：

複素数

$$\begin{array}{ccccccc} \text{等比数列 } a^n & \longrightarrow & \text{実数冪 } a^t & \longrightarrow & \text{指数関数 } e^t & \searrow & \\ & & & & & & \text{複素指数関数 } e^z \\ & & & & \text{三角関数} & \nearrow & \end{array}$$

三角・指数・対数関数の微積分

今後のプラン・本日やること

1. 複素数
   - 定義
   - 複素数の相等
   - 複素平面
   - 極形式
   - 回し伸ばしの原理
2. 指数関数
   - 微生物の増殖
   - 定数倍変化の法則
   - 有理数べき
   - 実数べき

複素数
定義

複素数の定義

$$i^2 = -1$$

をみたす i を虚数単位とよぶ.

$$x + iy, \quad x, y \text{ は実数}$$

の形の数を複素数とよぶ.

複素数 $z = x + iy$ に対して

$\mathrm{Re}(z) = x$: 複素数 z の実部 (real part),

$\mathrm{Im}(z) = y$: 複素数 z の虚部 (imaginary part)

と定める.

複素数
相等

複素数の相等

$x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ のとき

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$$

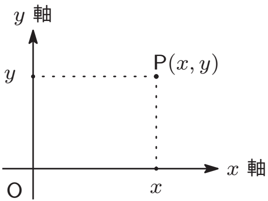
とくに

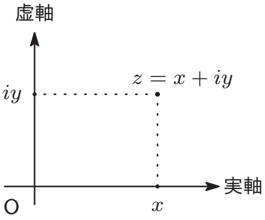
$$x_1 + iy_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 = 0$$

複素数

複素平面

座標平面と複素平面





[座標平面]
平面の各点 P に 2 つの実数の組 (x, y) を対応させたもの.
(x, y) を P の直角座標という.

[複素平面]
直角座標 (x, y) の点 P に複素数

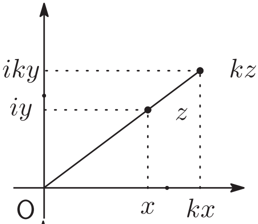
$$z = x + iy$$

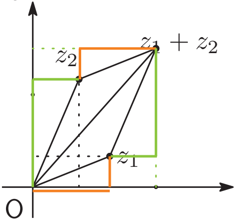
を対応させたもの.
横の座標軸を実軸, 縦の座標軸を虚軸と呼ぶ.

複素数

複素数の実数倍と和

複素数の実数倍と和





実数倍： $k > 0$ のとき kz は z を偏角を変えないで絶対値を k 倍。
$k < 0$ のときは向きを反対にして絶対値を $|k|$ 倍。

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad kz = kx + iky$$

要するに実部・虚部をそれぞれ k 倍

和： $z_1 + z_2$ は図のような平行四辺形の対角線が表す複素数。

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$$
$$\Rightarrow \quad z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

要するに実部・虚部ごとに加える

複素数

複素数と平面のベクトル

実数倍と和は複素数と平面のベクトルは同じ考え方で決められている。

しかし積は違う考え方をする。

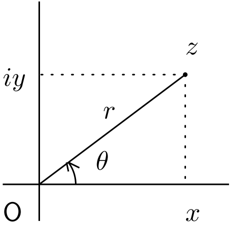
平面上では「ベクトル $\times$ ベクトル $=$ ベクトル」となるような積は考えない。

複素数どうしの積を考えることはできて、面白い性質があるので重要である。

複素数

極形式

複素数の極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して

$r =$ 点 z と原点 O の距離,
$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

と表される．これを複素数 z の極形式という．

$r = |z|$: z の絶対値,
$\theta = \arg z$: z の偏角

という

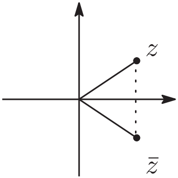
複素数

極形式と実部虚部の関係

極形式と実部虚部の関係

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

共役複素数



$z = x + iy$ に対して $\bar{z} = x - iy$ を z の 共役複素数という。

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$
$$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$$
$$z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$$

複素数

極形式と実部虚部の関係

複素数の乗法・除法

複素数の乗法・除法は文字 i を含む式と同様の規則で行い，i^2 が現われたらこれを -1 で置き換えることにする.

[例 1] $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$

[例 2] $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -1+i$ とするとき

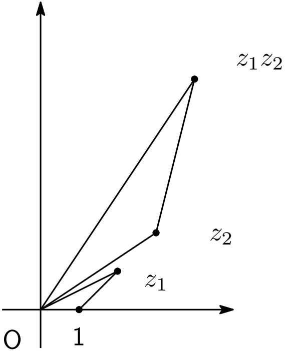
$$z_1\,z_2 = (2+3i)(-1+i) = -2+2i-3i+3i^2 = -5-i$$

わり算は分母を実数にするために分母分子に $\overline{z_2} = (-1-i)$ をかける

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2+3i}{-1+i} = \frac{(2+3i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} \\ &= \frac{-2-2i-3i-3i^2}{(-1)^2-i^2} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i\end{aligned}$$

複素数

積と極形式の関係



$z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 3 + 2i$ とするとき

$$z_1 z_2 = (2+i)(3+2i) = 4 + 7i$$

となるがここで

O, 1, z_1 の作る三角形と

O, z_2, $z_1 z_2$ の作る三角形

は相似である。

[問] このことを確かめよ。

実はこのことは任意の複素数 z_1, z_2 について成り立つ！以下確かめる。

複素数

回し伸ばしの原理

回し伸ばしの原理

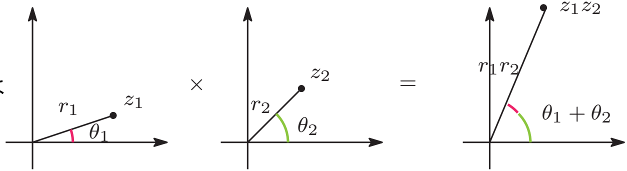
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$，商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

$$\text{(i) } \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2, \qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

$$\text{(ii) } \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

によって決まる．これを回し伸ばし (Dreh-streckung) の原理という。

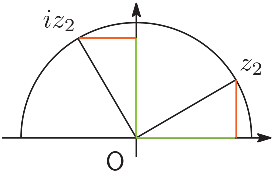
(i) は



ということ

複素数
回し伸ばしの原理

[(i) の確かめ] $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とする.

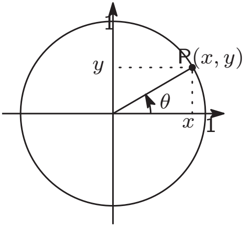


(Step 1) $z_1 = i$ の場合.

$$z_2 = x_2 + iy_2 \ \Rightarrow \ iz_2 = -y_2 + ix_2$$

だから iz_2 は z_2 を左周りに角 $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したもの.

[復習：三角関数]



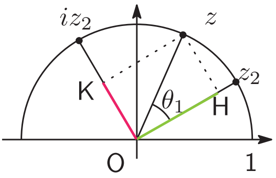
P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし, P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

複素数

回し伸ばしの原理



(Step 2) $|z_2| = 1$, $z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$ の場合.

z : z_2 を角 θ_1 回転したもの.

とし,

H : $(\cos\theta_1)z_2$

K : $(\sin\theta_1)(iz_2)$

とすると $\sin\theta_1$, $\cos\theta_1$ の定義より OH $\perp$ Hz, OK $\perp$ Kz だから OHzK は長方形となるので

$$z = (\cos\theta_1)z_2 + (\sin\theta_1)(iz_2) = (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2 = z_1 z_2$$

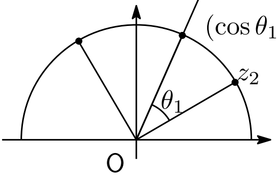
まとめて

$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ は z_2 を 角 θ_1 だけ回転したもの.

$|z_2| \neq 1$ のときも同様にできる。

複素数

回し伸ばしの原理



(Step 3) $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ の場合.

$z_1 z_2$ は $(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)z_2$ と

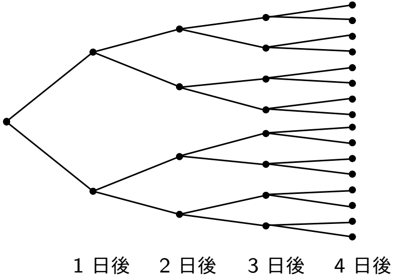
偏角が同じで

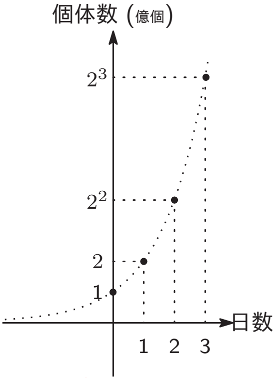
絶対値を r_1 倍したもの

だから結局 (i) がわかった.

指数関数
微生物の増殖

[増殖と指数関数] 分裂により個体数が 1 日で 2 倍になる微生物がある。





初めの個体数
1 (億個)
$\Downarrow$
n 日後の個体数
2^n (億個)

n 日後 2^n 倍となる。
等比数列的変化である。

[本日の目標] 増殖は連続的変化であるはずである。t 日後 (t は実数) の個体数を決めたい。

指数関数

定倍率変化の法則

「1 日で 2 倍に増殖する」　を一歩進めて

「(どの時点から始めても) 一定の時間がたつと全個体中の一定割合の個体が分裂」するのでその結果 「1 日後に 2 倍になる。」

と考える。

t 日後の個体数を 2^t と書くことにする。

t が一定量 h だけ増加すると, 2^t は t によらず一定の倍率 $u(h)$ で変化するから

$$\frac{2^{t+h}}{2^t} = u(h) \quad (u(t) \text{ は } t \text{ によらない})$$

これを定倍率変化の法則という。

ここで $t = 0$ とおくと $2^0 = 1$ だから $\frac{2^{0+h}}{2^0} = 2^h$ より $2^{t+h} = 2^t 2^h$。 つまり

指数法則

定倍率変化の法則は指数法則

$$2^{t+s} = 2^t 2^s, \quad t, s \text{ は実数} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \diamondsuit$$

とおなじことである。

指数関数

指数法則

[例：t が有理数 $\dfrac{n}{m}$ の場合]

$$\begin{array}{c|cccc} t & 0 \xrightarrow{+\frac{n}{m}} & \frac{n}{m} \xrightarrow{+\frac{n}{m}} & \cdots\cdots \xrightarrow{+\frac{n}{m}} & n \\ \hline 2^t & 1 \xrightarrow[\times x]{} & x \xrightarrow[\times x]{} & \cdots\cdots \xrightarrow[\times x]{} & 2^n \end{array}$$

$$2^{\frac{n}{m}} = x \ (n, m = 1, 2, \cdots)$$

とおくと定倍率変化の法則により

$$x^m = 2^n$$

だから

$$x = \sqrt[m]{2^n}$$

同様にして

有理数べき

$$2^0 = 1 \qquad 2^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

$$2^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \qquad 2^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad m, n = 1, 2$$

指数関数

指数法則

一般の実数冪

$a > 0$, $a \neq 1$ とする。2^t と同様に

$$a^t \quad (t \text{ は実数})$$

が考えられる。これを a を底とする実数冪という。t を指数という。

指数法則に追加

$a > 0$, $b > 0$, t, s は実数のとき

(i) $a^r a^s = a^{r+s}$,

(ii) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,

(iii) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(iv) $(ab)^r = a^r b^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

指数関数

累乗根を含む式の計算

累乗根は有理数べきに直して指数法則を使って計算するのがよい。

[例]

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^3 \times \sqrt{a} \times \sqrt[4]{a}} &= \left(a^3 \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(a^{3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= a^{(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}} \\
&= a^{\frac{15}{8}}
\end{aligned}
$$