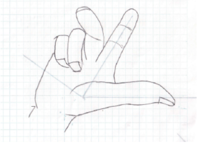
本日やること

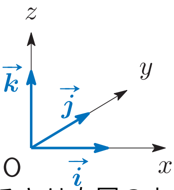
1. ベクトル
   - ベクトルの外積

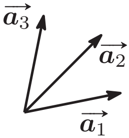
ベクトル

ベクトルの外積

右手系・左手系







空間のベクトルが右手系であるとは左図のようであること。左手系も同様に考える。もう少しキチンというと

(i)　空間の基本ベクトル $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ は（この順序で）右手系である。$\{-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}\}$ は（この順序で）左手系である。

(ii)　(順序のついた) 空間のベクトルの組 $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ が右手系 (または左手系) であるとは, これらを連続的に変形して

$$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}, \quad (\text{または } \{-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}\}),$$

に一致させるとき, 一度も同一平面内に乗ることがないようにできるということである。

ベクトル

ベクトルの外積

[注意]
1. $\{\overrightarrow{\boldsymbol{a}_1}, \overrightarrow{\boldsymbol{a}_2}, \overrightarrow{\boldsymbol{a}_3}\}$ が右手系のとき二つのベクトルの順序を入れ替えると左手系になる。
2. 後ほどもっとすっきりした定義を与える。

ベクトル

ベクトルの外積

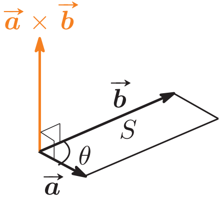
空間のベクトルの外積の定義

$\vec{a}$, $\vec{b}$: 空間のベクトルで 1 次独立 ならば

(i) $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) $|\vec{c}| = \vec{a}$, $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積 ($= S$ とおく。$|\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$ に等しい。)

(iii) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ は右手系



を満たすベクトル $\vec{c}$ がただ一つある。この $\vec{c}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ の外積といい

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

であらわす。

$\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行, またはどちらかが $\vec{0}$ ならば $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ と定める。

外積の向きは「右ねじを $\vec{a}$ から $\vec{b}$ の向きに回すときねじの進む向き」といってもよい。

ベクトル

ベクトルの外積

目標は：

外積の性質 ($\clubsuit$)

[I] $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}$

[II] $(m\vec{\boldsymbol{a}}) \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times (m\vec{\boldsymbol{b}}) = m\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$

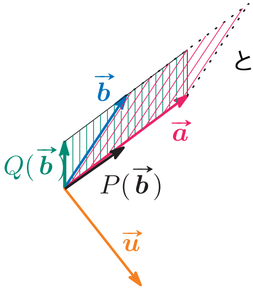
[III] $\vec{\boldsymbol{a}} \times (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{c}}$

[確かめ]

[I], [II] は定義より明らか。

ベクトル
ベクトルの外積

[(III) の確かめの準備]



ベクトル $\vec{b}$ の ベクトル $\vec{a}$ への正射影を $P(\vec{b})$ と書き,

$$Q(\vec{b}) = \vec{b} - P(\vec{b})$$

とおくと

$$Q(\vec{b}) \perp \vec{a}$$

$(Q(\vec{b})$ と $\vec{a}$ の張る平行四辺形の面積$)$

$= (\vec{b}$ と $\vec{a}$ の張る平行四辺形の面積$)$

$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$ は

大きさ $|Q(\vec{b})||\vec{a}|$ で

方向は $\vec{a}$, $\vec{b}$ と直交し,

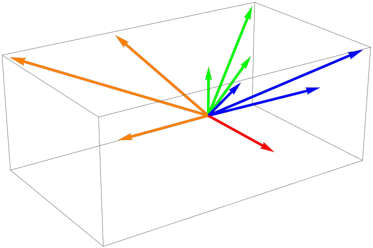
$\vec{a}$, $Q(\vec{b})$, $\vec{u}$ が右手系になる向き

ベクトル
ベクトルの外積

[外積の性質 (♣) の確かめ]

[III] の確かめ。 $P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$ より

$$\begin{aligned} Q(\vec{b}+\vec{c}) &= (\vec{b}+\vec{c}) - (P(\vec{b}+\vec{c})) \\ &= \vec{b} - P(\vec{b}) + \vec{c} - P(\vec{c}) = Q(\vec{b}) + Q(\vec{c}) \end{aligned}$$



ここで

$Q(\vec{b}),\ Q(\vec{c}),\ Q(\vec{b}+\vec{c})$

を同じ向きに $\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン回転させて $|\vec{a}|$ 倍すると

$\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{a}\times\vec{c},\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$

になるから [III] がわかる。

ベクトル
ベクトルの外積

外積の成分表示

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

と表される。

[復習：2・3 次の行列式]

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{pmatrix}$$

ベクトル

ベクトルの外積

[復習：行列式の第 1 行に関する展開]

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & b_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

他の行・列についても同様のことが成り立つ。

ベクトル
ベクトルの外積

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a_1\vec{\boldsymbol{i}} + a_2\vec{\boldsymbol{j}} + a_3\vec{\boldsymbol{k}}) \times (b_1\vec{\boldsymbol{i}} + b_2\vec{\boldsymbol{j}} + b_3\vec{\boldsymbol{k}}) \\
&= a_1b_1\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} + a_1b_2\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} + a_1b_3\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + a_2b_1\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}} + a_2b_2\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} + a_2b_3\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} \\
&\quad + a_3b_1\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} + a_3b_2\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} + a_3b_3\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}}
\end{aligned}
$$

ところで

$$
\begin{aligned}
&\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{0}}, \\
&\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = -\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = -\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{j}}
\end{aligned}
$$

だから

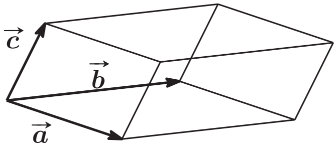
$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\boldsymbol{i}} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\boldsymbol{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\boldsymbol{k}} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

ベクトル
ベクトルの外積

ベクトル 3 重積

ベクトルの (順序のついた)3 つ組 $\{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ に対して $\vec{a_1} \bullet (\vec{a_2} \times \vec{a_3})$ を**ベクトル 3 重積**とよぶ。

$\vec{a_1} = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$,　$\vec{a_2} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$,　$\vec{a_3} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ のとき



$$\vec{a}_1 \bullet (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdots (\star)$$

図のような平行 6 面体の体積を V とおくと

$$= \begin{cases} V & (\star) \text{ が正のとき} \\ -V & (\star) \text{ が負のとき} \end{cases}$$

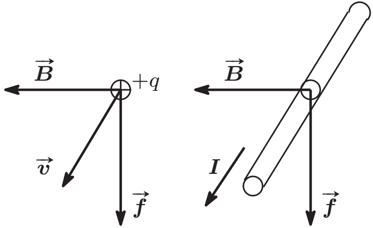
$(\star)$ が 0 のときは $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ は同一平面内にあり $V = 0$ である。だから

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \text{ が右手系 (左手系)} \iff (\star) \text{ が正（負）}$$

ベクトル

ベクトルの外積

[応用：Lorentz 力]



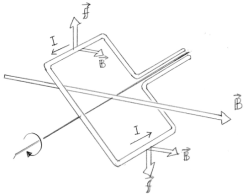
図のように磁束密度 $\vec{B}$ の磁界中で電荷 q を持つ点が速度 $\vec{v}$ で運動するとき

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

の力を受ける。これを Lorentz 力 という。これにより電流 $\vec{I}$ の流れている針金は (単位長さ当たり)

$$\vec{f} = \vec{I} \times \vec{B}$$

の力を受ける。



図のような針金のループには図のように回転させようとする力 (トルク) が働く。これが直流モーターの原理である。