本日やること

1. ベクトル
   - ベクトルの平行・垂直
   - 直線・線分のベクトル表示
   - 三角形の表示
   - 空間のベクトル

ベクトル

ベクトルの平行・垂直

ベクトルの平行条件・垂直条件

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

(i)　$\vec{a} \parallel \vec{b} \iff \vec{b} = m\vec{a}$ となるスカラー m がある

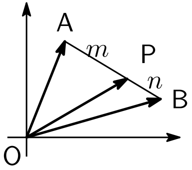
(ii)　$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

(i): スカラー倍の定義から明らか。
(ii): 内積の定義から明らか。

ベクトル

線分・直線

線分の内分点のベクトル表示



P を線分 AB を $m:n\ (m>0, n>0)$ に内分する点とすると

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

とくに P が AB の中点のとき

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$$

[確かめ] 仮定より $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であり

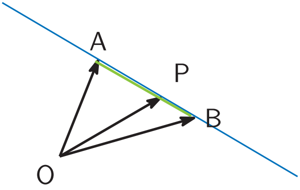
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ベクトル

直線・線分

線分・直線のベクトルによる表示（パラメータ表示）



O : 原点とするとき

[1]　点 P が直線 AB 上にある

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,　t は実数

[2]　点 P が線分 AB 上にある

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}$,　$0 \leqq t \leqq 1$

[考え方]　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるが

P が直線 AB 上 $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left(= t\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \right)$

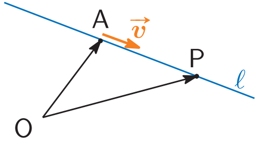
だから代入して整理すればよい。

とくに線分 AB 上にあるときは, $0 \leqq t \leqq 1$

ベクトル

線分・直線

線分・直線のベクトルによる表示（パラメータ表示）



[3] ℓ は点 A を通りベクトル $\vec{v}$ に平行な直線
P は ℓ 上の任意の点 とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{v} \quad (t \text{ は実数}) \quad \cdots (\star)$$

$\vec{v}$ を ℓ の方向ベクトル, t を パラメータという。
$(\star)$ によって直線を表す方法をパラメータ表示という。

[考え方] 前項 [1] で $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \boldsymbol{v}$ と考えればよい。

ベクトル

線分・直線

[方程式表示との関係] P(x, y), A(x_0, y_0) $\vec{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2)$ とすると

$$(\star) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases}$$

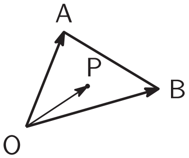
t を消去すると $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ のとき

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} \quad \text{あるいは} \quad y = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0) + y_0$$

ベクトル

三角形

三角形のベクトルによる表示



△OAB において

[1] 点 P が辺 AB 上にある

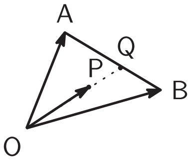
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s = 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0 \quad \cdots ①$$

[2] 点 P が △OAB の境界を含む内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},$$
$$t + s \leqq 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0 \quad \cdots ②$$

ベクトル
三角形

[考え方]　[1] は前項 (直線のパラメータ表示) [1] において, t を s に $(1-t)$ を t に置き換えればよい。



[2] は, 図のように Q をとると [1] より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = t_1\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s_1\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad t_1 + s_1 = 1,\ t_1 \geqq 0,\ s_1 \geqq 0$$

また

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = r\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\quad 0 \leqq r \leqq 1$$

だから合わせて

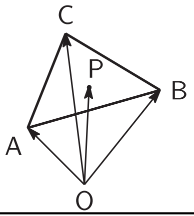
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = rt_1\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + rs_1\,\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad rt_1 + rs_1 = r \leqq 1,\ rt_1 \geqq 0,\ rs_1 \geqq 0$$

$rt_1 = t$, $rs_1 = s$ とおけば ② がえられる。

ベクトル

三角形

三角形のベクトルによる表示



O を原点とする．△ABC において

[3]　点 P が △ABC の境界を含む内部にある

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{OC}},$$
$$t+s+r=1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0,\ r \geqq 0$$

[考え方]　[2] より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad t+s \leqq 1,\ t \geqq 0,\ s \geqq 0$$

となる t, s がある。一方

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}},$$

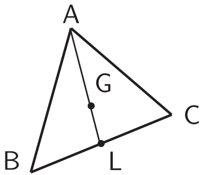
だから合わせて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-t-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + s\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

ここで $(1-t-s)$, t, s を t, s, r に置き換えればよい。

ベクトル
三角形

[例題]



O を原点とする． $\triangle$ABC において $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく． $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ となる点 G をとる。直線 AG は辺 BC を 2 等分することを示せ。（この点 G を $\triangle$ABC の重心という。）

[解] $$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} - \vec{a}\right)$$

BC の中点を L とすると $\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \dfrac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$ だから

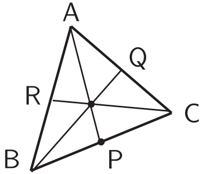
$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AL}}$$

したがって G は AL 上にある。

ベクトル

三角形

[発展問題] 少し難しくする。



O を原点とする. △ABC において P, Q, R を BC, CA, AB の中点とする。このとき AP, BQ, CR は一点で交わることを示せ。（この点を △ABC の**重心**という。）

[参考] 「実数 t, s が $t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathbf{0}$ を満たすならば $t = s = 0$ となる」 ことを使う必要がある。

やってみてください。

ベクトル
空間のベクトル

空間のベクトルも平面の場合と全く同じに定義される。

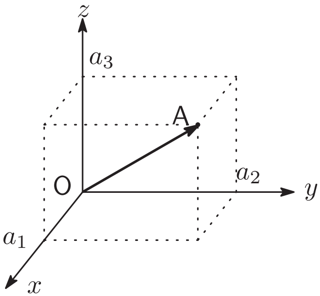
和・スカラー倍・内積も同様に定義される。

成分表示に関する部分は特別に考える必要がある。

ベクトル

成分表示 (空間の場合)

ベクトルの成分表示の定義 (空間の場合)



空間のベクトル $\vec{a}$ が $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, A の座標が (a_1, a_2, a_3) のとき

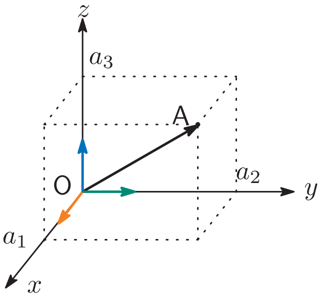
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

と表す．これを $\vec{a}$ の成分表示という．a_1, a_2, a_3 をそれぞれ x 成分, y 成分, z 成分という。

ベクトル

成分表示 (空間の場合)

基本ベクトル (空間の場合)



$\vec{i} = (1, 0, 0)$: x 軸方向の基本ベクトル
$\vec{j} = (0, 1, 0)$: y 軸方向の基本ベクトル
$\vec{k} = (0, 0, 1)$: z 軸方向の基本ベクトル
という。このとき

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \iff \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

ベクトル

成分表示 (空間の場合)

ベクトルの成分による計算 (空間の場合)

$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2, a_3)$,　$\vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{b}} \iff a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$

[II] : $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

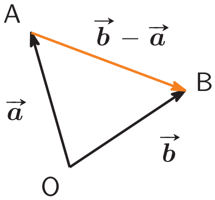
[III] : $\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

[VI] : $m\vec{\boldsymbol{a}} = (ma_1, ma_2, ma_3)$　(m はスカラー)

ベクトル

2 点を結ぶベクトルとその成分表示 (空間の場合)

2 点を結ぶベクトル (空間の場合)



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{b} - \vec{a}$$

さらに A の座標 (a_1, a_2, a_3), B の座標 (b_1, b_2, b_3) のとき

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ だから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$