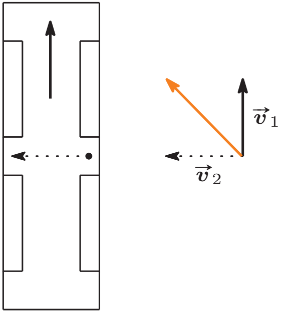
本日やること

1. ベクトル
   - 速度の合成・力の合成
   - 内積

ベクトル

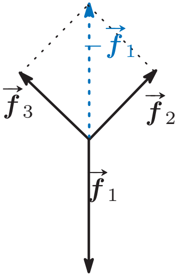
速度の合成

[例題]



走行中の電車内で右のドアから左のドアに歩いて移動している人がいる。電車の走行速度を $\vec{v}_1$, 人の歩く速度（電車に対する相対速度である）を $\vec{v}_2$ とすると, 人の地面に対する速度は $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ となる。

ベクトル
力の合成



点にいくつかの力 $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \ \cdots$ が働いているとき，その点が静止しているならば

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + \cdots = \vec{0}$$

(左辺はベクトルとしての和)

であることが実験的に分かっている。

したがって図において

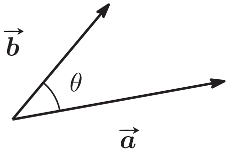
$$\vec{f}_2 + \vec{f}_3 = -\vec{f}_1$$

となり 力 $\vec{f}_2 + \vec{f}_3$ と $-\vec{f}_1$ は同じ働きをすることがわかる。

ベクトル

内積

内積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき

内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{\mathbf{0}}, \vec{b} \neq \vec{\mathbf{0}} \text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で定める。

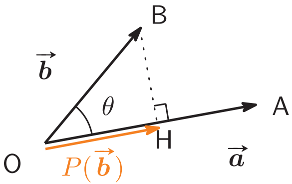
内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ。

平面の場合も空間の場合も同様に定義できる。

ベクトル

内積

正射影の定義



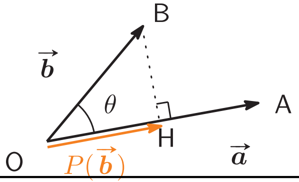
$\vec{a} = \mathrm{OA}$, $\vec{b} = \mathrm{OB}$ とし，
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影といい，$P(\vec{b})$ で表す。

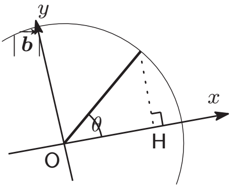
ベクトル

内積

正射影の性質 (I)



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet P(\vec{b})$$



図のように座標軸をとると H の x 座標は $|\vec{b}|\cos\theta$

$\cos\theta > 0$ のとき $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角は 0 だから

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b}) = |\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

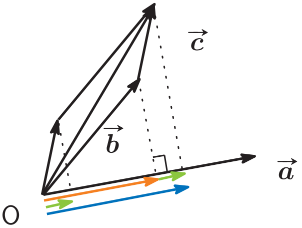
$\cos\theta < 0$ のとき $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角は π だから

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b}) = |\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\pi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

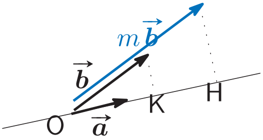
ベクトル

内積

正射影の性質 (II)



$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$



$$P(m\vec{b}) = mP(\vec{b})$$

ベクトル
内積

[確かめ] (0) $\vec{\boldsymbol{h}} = P(\vec{\boldsymbol{b}})$ となる必要十分条件は
「① $\vec{\boldsymbol{h}} = t\vec{\boldsymbol{a}}$ となる実数 t があり、かつ ② $\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$」であること。

(i) $\vec{\boldsymbol{h}} = P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{k}} = P(\vec{\boldsymbol{c}}) = s\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると

$\vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}} = (t+s)\vec{\boldsymbol{a}}$ ③,

また $\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{c}} - \vec{\boldsymbol{k}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$ より $(\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}}) + (\vec{\boldsymbol{c}} - \vec{\boldsymbol{k}}) \perp \vec{\boldsymbol{a}}$ が出るので

$(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) - (\vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}}) \perp \vec{\boldsymbol{a}} \cdots$ ④。

①, ② と ③, ④ を比較して $P(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}} = P(\vec{\boldsymbol{b}}) + P(\vec{\boldsymbol{c}})$

(ii) $P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$ とする。$t > 0$, $m > 0$ の場合は図からわかるように $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = m\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ だから $P(m\vec{\boldsymbol{b}}) = mP(\vec{\boldsymbol{b}})$。
その他の場合も同様。

ベクトル

内積

内積の性質

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

[II] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}}$

[III] : $(m\vec{\boldsymbol{a}}) \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (m\vec{\boldsymbol{b}}) = m(\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})$ (m はスカラー)

[VI] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}}$ (分配法則)

ベクトル

内積

[確かめ]　[I], [II] は定義より明らか。

t を実数とするとき $\vec{a} \bullet (t\vec{a}) = t|\vec{a}|^2$ である。なぜなら

$t > 0$ のとき $\vec{a}$ と $t\vec{a}$ のなす角は 0 だから

$$\vec{a} \bullet (t\vec{a}) = |\vec{a}||t\vec{a}| \cos 0 = t|\vec{a}|^2$$

$t < 0$ のとき $\vec{a}$ と $t\vec{a}$ のなす角は π だから

$$\vec{a} \bullet (t\vec{a}) = |\vec{a}||t\vec{a}| \cos \pi = -|t||\vec{a}|^2 = t|\vec{a}|^2$$

[III] の確かめ。 $P(\vec{b}) = t\vec{a}$ とすると

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet P(\vec{b}) = \vec{a} \bullet (t\boldsymbol{a}) = t|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \bullet (m\vec{b}) = \vec{a} \bullet P(m\vec{b}) = \vec{a} \bullet (mP(\vec{b})) = \vec{a} \bullet (mt\boldsymbol{a}) = mt|\vec{a}|^2$$

を比較すればよい。

[IV] の確かめ。 $P(\vec{c}) = s\vec{a}$ とすると

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet (t+s)\vec{a} = (t+s)|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b}) = \vec{a} \bullet (t\vec{a}) = t|\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \bullet P(\vec{c}) = \vec{a} \bullet (s\vec{a}) = s|\vec{a}|^2$$

を比較すればよい。

ベクトル

内積の成分表示

内積の成分表示 (平面の場合)

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2),\ \ \vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2)\ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

[確かめ] $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ を x 軸方向, y 軸方向の基本ベクトルとすると

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_1 \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 \vec{\boldsymbol{j}},\quad \vec{\boldsymbol{b}} = b_1 \vec{\boldsymbol{i}} + b_2 \vec{\boldsymbol{j}}$$

だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 \vec{\boldsymbol{j}}) \bullet (b_1 \vec{\boldsymbol{i}} + b_2 \vec{\boldsymbol{j}})$$

内積の性質 [III], [IV] を使って

$$= a_1 b_1 \vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} + a_1 b_2 \vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} + a_2 b_1 \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 b_2 \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}}$$

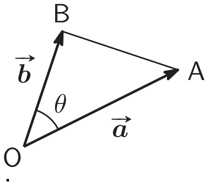
ここで $\vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} = |\vec{\boldsymbol{i}}|^2 = 1$, $\vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} = |\vec{\boldsymbol{j}}|^2 = 1$, $\vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} = 0$ だから

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル

内積と角

内積と角の関係 (平面の場合)



図の状況で

[I] $$\cos\theta = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

[II] $$\cos\theta = \frac{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OB}^2}{2\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}$$

[I] は定義より明らか。
[II] は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\bullet(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OB}\times\mathrm{OA}\times\cos\theta\end{aligned}$$

だから。