ガイダンス

電気数学演習

選択　1 単位

内容： 電磁気学を正しく理解するための準備をします。

- ベクトルと複素数
- 複素指数関数とその微積分法
- 偏微分法と重積分法
- 線積分・面積分
- いろいろな座標系と座標変換

ガイダンス

実施方法：

週 2 回 14 回　水曜 3・4 時限　金曜 5・6 時限

毎回講義と問題演習をします。演習問題を解いて、ピアサポーターに正解確認をしてもらって必ず提出してください。講義のスライドと演習問題の解説を小山のホームページ
http://www.eds.it-hiroshima.ac.jp/koyama/
にアップロードします。講義スライドを事前に印刷してノート代わりに利用することをお勧めします。

期末試験をするかどうかは未定です。

本日やること

1. ベクトル
   - スカラー量・ベクトル量
   - ベクトルの定義
   - ベクトルの大きさの定義
   - ベクトルの和
   - ベクトルのスカラー倍
   - ベクトルの成分表示
   - 2 点を結ぶベクトル
   - 内積

参考書 = 大日本図書 新線形代数 (線形代数 A の教科書)

ベクトル

スカラー量・ベクトル量

何のためにベクトルを使うか。

1. 図形の研究
2. 力学・工学のための数学的道具

$$[\text{物理量}] = \begin{cases} [\text{スカラー量}] \ : \ \text{実数で表される量} \\ \qquad \text{例：長さ, 時間, 質量, 温度, 電荷, 電位}, \cdots \\ [\text{ベクトル量}] \ : \ \text{大きさと向きを持つ量} \\ \qquad \text{例：速度, 加速度, 力 (とくに電気力, 磁力)}, \cdots \end{cases}$$

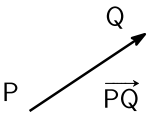
電磁気学を学ぶために必要である。

ベクトル

ベクトルの定義

ベクトルの定義

平面または空間のベクトルを定義する。どちらも同様に定義できるので，当面区別しない。



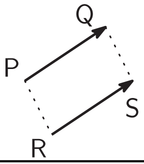
図のような向きのついた線分を $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ で表し ベクトル PQ とよぶ

P：始点

Q：終点

記号 $\vec{a}, \vec{b}, \cdots$ も用いる

ただし平行移動して重なるベクトルは同じものと考える。

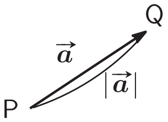


$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{RS}}$$

ベクトル

ベクトルの大きさ・和

ベクトルの大きさ



$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ のとき

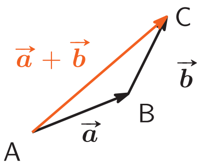
ベクトル $\vec{a}$ の大きさ $|\vec{a}|$ を

$$|\vec{a}| = \overline{\mathrm{PQ}}$$

で定める。

ベクトル
ベクトルの和

ベクトルの和の定義



$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}},$$
$$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

のときベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ を

$$\vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

で定める。

ベクトルの継ぎ足しと考えればよい。

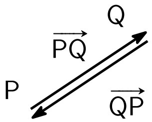
ベクトル

ベクトルの和

0 ベクトル・逆ベクトル・ベクトルの差の定義

[0 ベクトル]　:　始点と終点が一致したベクトルを 0 ベクトルといい $\vec{\mathbf{0}}$ で表す。

[逆ベクトル]



ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ の 逆ベクトル $-\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を

$$-\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

で定める。

[ベクトルの差] :　$\vec{\boldsymbol{a}} + (-\vec{\boldsymbol{b}})$ を $\vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}}$ と書くことにする

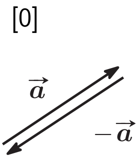
ベクトル
ベクトルの和の性質

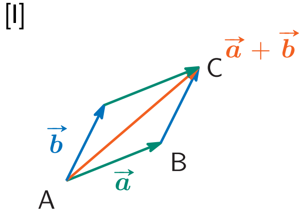
ベクトルの和の性質

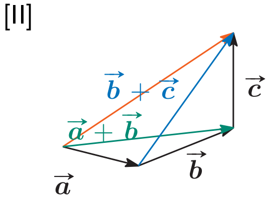
[0] : $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, $\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,

[I] : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (交換法則)

[II] : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (結合法則)







ベクトル

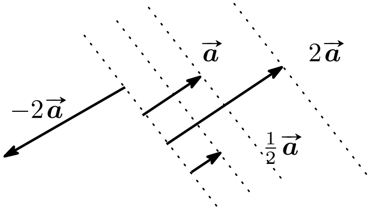
ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の定義

m : 実数 (スカラー), $\vec{\boldsymbol{a}}$: ベクトル とするとき, スカラー倍を

$$m\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{cases} \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と同じ向きのベクトル} & (m > 0 \text{ のとき}) \\ \vec{\boldsymbol{0}} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \text{大きさ } |m||\vec{\boldsymbol{a}}| \text{ で } \vec{\boldsymbol{a}} \text{ と反対向きのベクトル} & (m < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。



ベクトル

ベクトルのスカラー倍

ベクトルのスカラー倍の性質

m, n：実数 (スカラー)，　$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$：ベクトル のとき

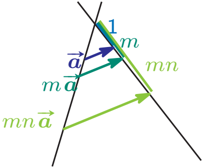
[III]：$m(n\vec{\boldsymbol{a}}) = (mn)\vec{\boldsymbol{a}}$,

[IV]：$(m+n)\vec{\boldsymbol{a}} = m\vec{\boldsymbol{a}} + n\vec{\boldsymbol{a}}$

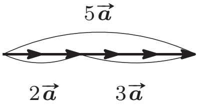
[V]：$m(\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = m\vec{\boldsymbol{a}} + m\vec{\boldsymbol{b}}$

[VI]：$|m\vec{\boldsymbol{a}}| = |m||\vec{\boldsymbol{a}}|$

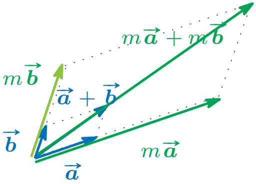
[III]



[IV]



[V]

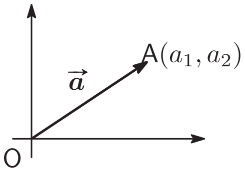


ベクトル

成分表示 (平面の場合)

直角座標を用いて平面あるいは空間のベクトルを成分表示することができる。平面の場合と空間の場合の区別が必要である。

ベクトルの成分表示の定義 (平面の場合)



$\vec{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, A の座標が (a_1, a_2) のとき

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$$

と表す．これを $\boldsymbol{a}$ の成分表示という．
a_1, a_2 をそれぞれ x 成分, y 成分という。

ベクトル

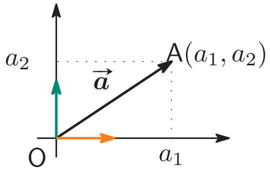
成分表示 (平面の場合)

基本ベクトルの定義 (平面の場合)

$\vec{i} = (1, 0)$: x 軸方向の基本ベクトルという。

$\vec{j} = (0, 1)$: y 軸方向の基本ベクトルという。

成分表示と基本ベクトル



$\vec{i}$: x 軸方向の基本ベクトル

$\vec{j}$: y 軸方向の基本ベクトル

とするとき

$\vec{a} = (a_1, a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$

ベクトル

成分表示 (平面の場合)

ベクトルの成分による計算 (平面の場合)

$\vec{a} = (a_1, a_2)$,　$\vec{b} = (b_1, b_2)$ のとき

[I] : $\vec{a} = \vec{b} \ \Leftrightarrow \ a_1 = b_1, a_2 = b_2$

[II] : $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

[III] : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

[VI] : $m\vec{a} = (ma_1, ma_2)$　(m はスカラー)

[III] :
$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_1\vec{i} + b_2\vec{j} \\ &= a_1\vec{i} + b_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_2\vec{j} \\ &= (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j}\end{aligned}$$

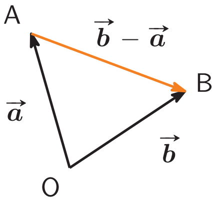
だから。

[IV] : $m\vec{a} = m(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) = ma_1\vec{i} + ma_2\vec{j}$ だから。

ベクトル

2 点を結ぶベクトルとその成分表示 (平面の場合)

2 点を結ぶベクトル (平面の場合)



$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{b}-\vec{a}$

さらに A の座標 (a_1, a_2), B の座標 (b_1, b_2) のとき

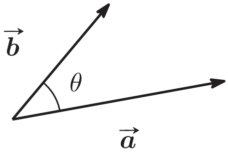
$\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\quad\vec{b}=(b_1, b_2)$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1, b_2-a_2)$

ベクトル

内積

内積の定義



$\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とするとき

内積 $\vec{a} \bullet \vec{b}$ を

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{cases} |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta, & (\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}\text{のとき}) \\ 0, & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

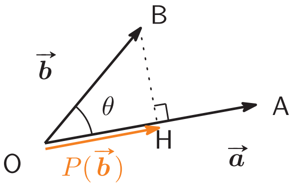
で定める。

内積はベクトルではなくスカラーであることに注意せよ。

平面の場合も空間の場合も同様に定義できる。

ベクトル
内積

正射影の定義

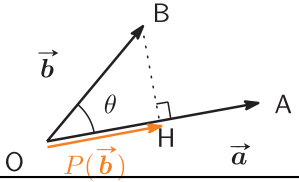


$\vec{a} = \mathrm{OA}$, $\vec{b} = \mathrm{OB}$ とし，
B から直線 OA に引いた垂線と OA の交点を H とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{b}$ の $\vec{a}$ への正射影といい，$P(\vec{b})$ で表す。

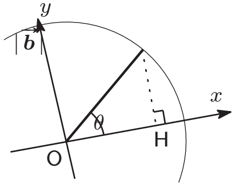
ベクトル

内積

正射影の性質 (I)



$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet P(\vec{b})$$



図のように座標軸をとると H の x 座標は $|\vec{b}|\cos\theta$

$\cos\theta > 0$ のとき $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角は 0 だから

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b}) = |\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

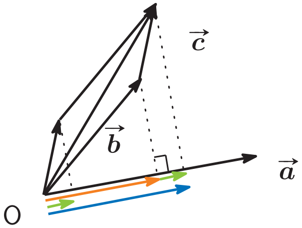
$\cos\theta < 0$ のとき $\vec{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角は π だから

$$\vec{a} \bullet P(\vec{b}) = |\vec{a}||\overrightarrow{\mathrm{OH}}|\cos\pi = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

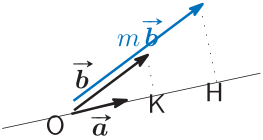
ベクトル

内積

正射影の性質 (II)



$$P(\vec{b}+\vec{c}) = P(\vec{b}) + P(\vec{c})$$



$$P(m\vec{b}) = mP(\vec{b})$$

ベクトル

内積

[確かめ] (0) $\vec{\boldsymbol{h}} = P(\vec{\boldsymbol{b}})$ となる必要十分条件は
「① $\vec{\boldsymbol{h}} = t\vec{\boldsymbol{a}}$ となる実数 t があり、かつ ② $\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$」であること。

(i) $\vec{\boldsymbol{h}} = P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{k}} = P(\vec{\boldsymbol{c}}) = s\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると

$\vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}} = (t+s)\vec{\boldsymbol{a}}$ ③,

また $\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{c}} - \vec{\boldsymbol{k}} \perp \vec{\boldsymbol{a}}$ より $(\vec{\boldsymbol{b}} - \vec{\boldsymbol{h}}) + (\vec{\boldsymbol{c}} - \vec{\boldsymbol{k}}) \perp \vec{\boldsymbol{a}}$ が出るので

$(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) - (\vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}}) \perp \vec{\boldsymbol{a}} \cdots$ ④。

①, ② と ③, ④ を比較して $P(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{h}} + \vec{\boldsymbol{k}} = P(\vec{\boldsymbol{b}}) + P(\vec{\boldsymbol{c}})$

(ii) $P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$ とする。$t > 0$, $m > 0$ の場合は図からわかるように $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = m\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ だから $P(m\vec{\boldsymbol{b}}) = mP(\vec{\boldsymbol{b}})$。
その他の場合も同様。

ベクトル

内積

内積の性質

[I] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}} = |\vec{\boldsymbol{a}}|^2$

[II] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \bullet \vec{\boldsymbol{a}}$

[III] : $(m\vec{\boldsymbol{a}}) \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (m\vec{\boldsymbol{b}}) = m(\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}})$ (m はスカラー)

[VI] : $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{c}}$ (分配法則)

ベクトル

内積

[確かめ] [I], [II] は定義より明らか。

t を実数とするとき $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t\vec{\boldsymbol{a}}) = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$ である。なぜなら

$t > 0$ のとき $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $t\vec{\boldsymbol{a}}$ のなす角は 0 だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t\vec{\boldsymbol{a}}) = |\vec{\boldsymbol{a}}||t\vec{\boldsymbol{a}}| \cos 0 = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

$t < 0$ のとき $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $t\vec{\boldsymbol{a}}$ のなす角は π だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t\vec{\boldsymbol{a}}) = |\vec{\boldsymbol{a}}||t\vec{\boldsymbol{a}}| \cos \pi = -|t||\vec{\boldsymbol{a}}|^2 = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

[III] の確かめ。 $P(\vec{\boldsymbol{b}}) = t\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet P(\vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t\boldsymbol{a}) = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet (m\vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet P(m\vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (mP(\vec{\boldsymbol{b}})) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (mt\boldsymbol{a}) = mt|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

を比較すればよい。

[IV] の確かめ。 $P(\vec{\boldsymbol{c}}) = s\vec{\boldsymbol{a}}$ とすると

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet P(\vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t+s)\vec{\boldsymbol{a}} = (t+s)|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet P(\vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (t\vec{\boldsymbol{a}}) = t|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet P(\vec{\boldsymbol{c}}) = \vec{\boldsymbol{a}} \bullet (s\vec{\boldsymbol{a}}) = s|\vec{\boldsymbol{a}}|^2$$

を比較すればよい。

ベクトル

内積の成分表示

内積の成分表示 (平面の場合)

$$\vec{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2),\ \ \vec{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2) \ \Rightarrow\ \vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

[確かめ] $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$ を x 軸方向, y 軸方向の基本ベクトルとすると

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_1 \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 \vec{\boldsymbol{j}}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = b_1 \vec{\boldsymbol{i}} + b_2 \vec{\boldsymbol{j}}$$

だから

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = (a_1 \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 \vec{\boldsymbol{j}}) \bullet (b_1 \vec{\boldsymbol{i}} + b_2 \vec{\boldsymbol{j}})$$

内積の性質 [III], [IV] を使って

$$= a_1 b_1 \vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} + a_1 b_2 \vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} + a_2 b_1 \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} + a_2 b_2 \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}}$$

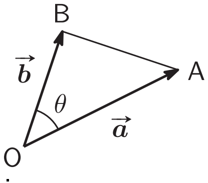
ここで $\vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} = |\vec{\boldsymbol{i}}|^2 = 1$, $\vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} = |\vec{\boldsymbol{j}}|^2 = 1$, $\vec{\boldsymbol{i}} \bullet \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{j}} \bullet \vec{\boldsymbol{i}} = 0$ だから

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2$$

ベクトル

内積と角

内積と角の関係 (平面の場合)



図の状況で

[I] $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

[II] $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OB}^2}{2\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}}$

[I] は定義より明らか。
[II] は

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \bullet (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \mathrm{OB}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OB} \times \mathrm{OA} \times \cos\theta\end{aligned}$$

だから。