小テスト　No.2　解説

1.　次のものを求めよ。ただし i は虚数単位とする。

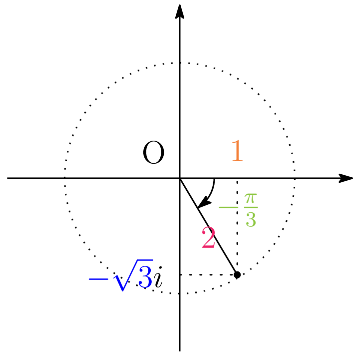
(1)　$(1-2i)(1+i) = 1+i-2i-2i^2 = 1+i-2i+2 = 3-i$

(2)　$\dfrac{1-2i}{1+i} = \dfrac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i-2i+2i^2}{1-i+i-i^2} = \dfrac{1-i-2i-2}{2} = \dfrac{-1-3i}{2}$

(3)　$2e^{-\frac{\pi}{3}i} = a+ib$ となる実数 a, b

$$2e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}i$$

だから $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$

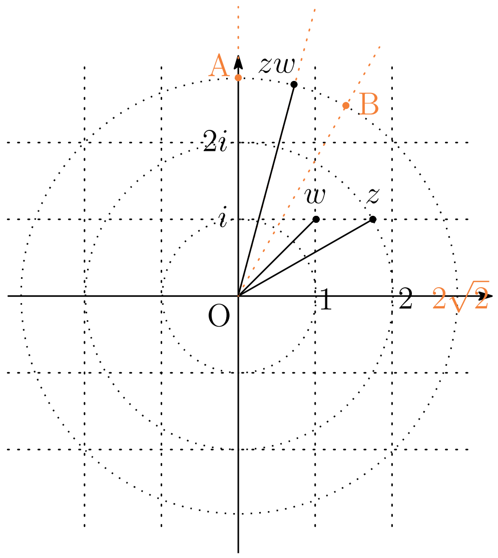


2.　$z = \sqrt{3}+i$, $w = 1+i$ とおく。ただし i は虚数単位とする。次のものを求めよ。または図示せよ。

(1) $zw = (\sqrt{3}+i)(1+i) = \sqrt{3}+\sqrt{3}i+i+i^2 = \sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$

(2) $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1+i} = \dfrac{(\sqrt{3}+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i+i-i^2}{1+i-i-i^2} = \dfrac{\sqrt{3}+1+(-\sqrt{3}+1)i}{2}$

(3) z, w, zw を複素平面上に図示せよ.



A の偏角 $= \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{6\pi}{12}$

B の偏角 $= \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{12}$

とするとき ∠AOB の 2 等分線と半径 $2\sqrt{2}$ の円の交点に zw をとる

(4) $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ $\quad \sqrt{(\sqrt{3})^2 + i^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$ は誤り

(5) $|w| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ $\quad \sqrt{1^2 + i^2} = \sqrt{1-1} = 0$ は誤り

(6) 図より偏角 $\arg(z)$ は $\arg(z) = \dfrac{\pi}{6}$ (30° はそろそろやめよう)

(7) 図より 偏角 $\arg(w)$ は $\arg(w) = \dfrac{\pi}{4}$ (45° はそろそろやめよう)

(8) z の極形式表示は (4), (6) により

$$z = |z|\left(\cos\left(\arg(z)\right) + i\sin\left(\arg(z)\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$2e^{\frac{\pi}{6}i}$ でもよいが, $2\angle 30^\circ$ は避けてほしい。

(9) w の極形式表示は (5), (7) により

$$w = |w|\left(\cos\left(\arg(w)\right) + i\sin\left(\arg(w)\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ でもよいが, $\sqrt{2}\angle 45^\circ$ は避けてほしい。

(10) zw の極形式表示は (8), (9) と回し伸ばしの原理より

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|\left(\cos\left(\arg(z) + \arg(w)\right) + i\sin\left(\arg(z) + \arg(w)\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) \end{aligned}$$

(11) $\dfrac{z}{w}$ の極形式表示 (8), (9) と回し伸ばしの原理より

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left(\cos\left(\arg(z) - \arg(w)\right) + i\sin\left(\arg(z) - \arg(w)\right)\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

(12) $\sin\dfrac{5\pi}{12}$ の値を求めよ。

(1) より

$zw = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$

一方 (10) より

$zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\right)$

だから虚部同士を比較して

$\sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

$\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

[別解] 加法定理を使って

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

としてもよいが,（上の計算を見ればわかる通り）三角関数の加法定理は回し伸ばしの原理から証明することができるのである。

3. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $(x^2 + 1)' = 2x$

関数 $x^2 + 1$ とその導関数 $(x^2 + 1)'$ は別のものだから区別すること。$x^2 + 1 = 2x$ 等は不可。

(2) $(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $\sqrt{x^2 + 1}$ の微分計算は合成関数の微分法を利用する。演習問題 No.8 の 1 を見よ。

$y = \sqrt{x^2+1}$, $x^2+1=t$ とおくと関数 $y=\sqrt{x^2+1}\cdots$⓪ は

t の関数 $y=\sqrt{t}\cdots$①

x の関数 $t=x^2+1\cdots$②,

の合成関数である。

① の導関数は (2) より $\dfrac{dy}{dt} = (t^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$　(()' は t による微分)

② の導関数は (1) より $\dfrac{dt}{dx} = (x^2+1)' = 2x$　(()' は x による微分)

だから

⓪ の導関数は合成関数の微分法により $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

である。

4. 次の導関数・積分を求めよ。

[大事なこと] 定積分の定義は

$$\int f(x)\,dx = F(x) \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \ \text{(積分定数は省略)}$$

だから

$$\int \cos x\,dx = \sin x \ \text{と}\ \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

は一組のものとして理解すること。

同様に

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \ \text{すなわち}\ \frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x \ \text{と}\ \int \sin x\,dx = -\cos x$$

は一組のものとして理解すること。

(1) $(\sin(3x))'$

$y=\sin(3x)$, $3x=t$ とおくと $y=\sin(3x)$ は $y=\sin t$ と $t=3x$ の合成関数となる.

$t=3x$ より $\dfrac{dt}{dx}=3$,

$y=\sin t$ より $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x).$$

(2) $\displaystyle\int \sin(3x)\,dx$

$$3x = t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$3 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{3}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{3} \qquad (**)$$

という等式が得られる．この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{3}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる.

これらにより $3x$, dx をおきかえると,

$$\int \sin(3x)\,dx = \int \sin t\left(\frac{1}{3}dt\right) = \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = \frac{1}{3}(-\cos t)$$

$t = 3x$ だから

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x)$$

(3) $(e^{2x})'$

$y = e^{2x}$, $t = 2x$ とおく.

関数 $y = e^{2x}$ は関数 $y = e^t$, $t = 2x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times 2 = 2\,e^t = 2\,e^{2x}$$

となる.

(4) $\displaystyle\int e^{2x}\,dx$

$$2x = t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．これらにより $2x$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x}\,dx = \int e^{t}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\int e^{t}\,dt = \frac{1}{2}e^{t}$$

$t = 2x$ だから

$$= \frac{1}{2}e^{2x}$$

(5) $(e^{(2+3i)x})' = (2+3i)e^{(2+3i)x}$　(第 8 回 25 ページを見よ。)

(6) (5) より

$$\int (2+3i)e^{(2+3i)x}\,dx = e^{(2+3i)x}$$

であるが、この両辺を $(2+3i)$ で割って

$$\int e^{(2+3i)x}\,dx = \frac{1}{(2+3i)}e^{(2+3i)x}$$

(7) $(e^{2x}\sin(3x))'$

積の微分法により

$(e^{2x}\cos 3x)' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2\,e^{2x}\,\cos 3x - 3\,e^{2x}\,\sin 3x.$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$ だから

$$\int_0^{\pi}\sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx$

$\displaystyle\int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x)$ だから

$$\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx = \Big[-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\cos(2\pi) - (-\frac{1}{2}\cos 0) = 0$$