小テスト　No.1　解説

1. 平面に点 A$(2,2)$, B$(3,-1)$ があり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示と大きさを求めよ。

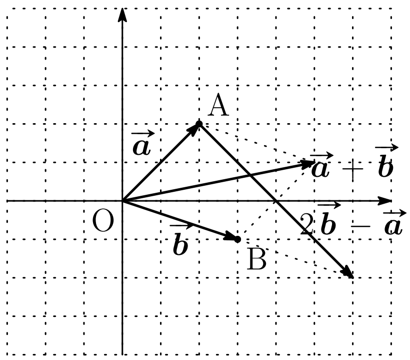
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3,1)-(2,2)=(3-2,1-2)=(1,-3)$
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

(3) $\vec{a}+\vec{b}$ の成分表示と大きさを求め, 図中に書きこめ。

$\vec{a}+\vec{b}=(2,2)+(3,-1)=(2+3,2+(-1))=(5,1)$
$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$

(4) $2\vec{b}-\vec{a}$ の成分表示と大きさを求め, 図中に書きこめ。

$2\vec{b}-\vec{a}=2(3,-1)-(2,2)=(6-2,-2-2)=(4,-4)$
$|2\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{4^2,(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$



平行移動して重なるベクトルは同じものとみなす。

(5) A B を通る直線のパラメータ表示を書け。(直線上の点を P としパラメータを t とせよ)

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(t+2,-3t+2)$

(6) (5) でPの座標を (x, y) とし t を消去して方程式表示を求めよ。

$\begin{cases} x = t+2 \\ y = -3t+2 \end{cases}$ から t を消去して $y = -3x + 8$

(7) 直線上の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるように t を決めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ となればよいが

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (t+2, -3t+2) \bullet (1, -3) = 10t - 4 = 0$

だから

$t = \dfrac{2}{5}$

2. 空間のベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}$ の成分表示を $\vec{\boldsymbol{a}} = (2, -1, 2), \vec{\boldsymbol{b}} = (-1, 1, 0)$ とする。次のものを求めよ。

(1) $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$

(2) $|\vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

(3) $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = (2, -1, 2) \bullet (-1, 1, 0) = 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = -3$

(4) $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ のなす角 θ

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$

(5) $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{\boldsymbol{i}} - 2\vec{\boldsymbol{j}} + \vec{\boldsymbol{k}} = (-2, -2, 1)$

(6) $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ が張る平行四辺形の面積 S

$S = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}||\sin\theta| = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3$

(7) $\vec{\boldsymbol{c}} = (-1, 0, 1)$ とするときのベクトル 3 重積

$\vec{\boldsymbol{c}} \bullet (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) = (-1, 0, -1) \bullet (-2, -2, 1) = 3$

(8)　$\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$, $\vec{\boldsymbol{c}}$ が張る平行 6 面体の, $\vec{\boldsymbol{a}}$ と $\vec{\boldsymbol{b}}$ が張る平行四辺形を底面とするときの高さ

$$\frac{|\vec{\boldsymbol{c}} \bullet (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}})|}{S} = 1$$

3.　省略