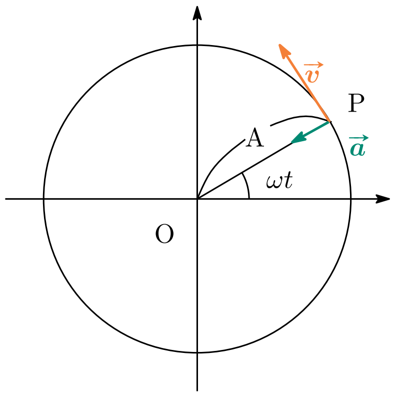
電気数学演習 第13回　解答

1. 平面の動点 P が原点を中心に半径 A 角速度 ω で等速円運動している。



(1) $t=0$ のとき $(A,0)$ にいるとしてこの点のパラメータ表示をかけ。

P は時刻 t には円周上を点 $(A,0,0)$ から出発して ωt ラジアン回転したところにいる．このときの P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は三角関数の定義をおもいだすと

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (A\cos\omega t, A\sin\omega t)$ （これを $= \vec{\boldsymbol{r}}(t)$ とおく）

(2) 速度ベクトルを求めよ。また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係を述べよ。

速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ は 位置ベクトル $\vec{\boldsymbol{r}}$ を時間微分したものだから

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}A\cos\omega t, \frac{d}{dt}A\sin\omega t\right) = (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係は

$$\vec{\boldsymbol{v}} \bullet \vec{\boldsymbol{r}} = (A\cos\omega t, A\sin\omega t) \bullet (-A\omega\sin\omega t, A\omega\cos\omega t) = 0$$

だから $\vec{\boldsymbol{v}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OP}}$.

(3) 加速度ベクトルを求めよ。また $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ との関係を述べよ。

加速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{a}}(t)$ は 速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}$ をさらに時間微分したものだから

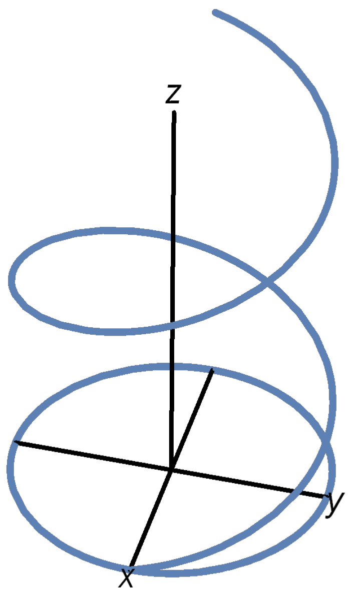
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\left(-A\omega\sin\omega t\right), \frac{d}{dt}\left(A\omega\cos\omega t\right)\right)$$

$$= \left(-A\omega^2\cos\omega t, -A\omega^2\sin\omega t\right) = -\omega^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

だから $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と逆向きで, 大きさは $A\omega^2$.

この点はつねに中心に向かって一定の力で引っ張られていることになる。

2. 動点 P の位置ベクトルが時刻 t によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t, ct)$ $(= \vec{r}(t)$ とおく$)$ のように表されるものとする.



これは図のような螺旋（らせん）である。

(1) このとき 速度ベクトル $\vec{v}(t)$, 加速度ベクトル $\vec{a}(t)$ を求めよ.

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = ((\cos t)', (\sin t)', (ct)') = (-\sin t, \cos t, c)$.　　($'$ は $\frac{d}{dt}$ とおなじ)

$\overrightarrow{a(t)} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = ((\cos t)'', (\sin t)'', (ct)'') = (-\cos t, -\sin t, 0)$.　　($''$ は $\frac{d^2}{dt^2}$ とおなじ)

(2) $\vec{\boldsymbol{k}}=(0,0,1)$ としたとき $\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{v}}$ となっていることを確かめよ.

$$\vec{\boldsymbol{k}}\times\vec{\boldsymbol{v}}=(0,0,1)\times(-\sin t,\cos t,c)$$

$$=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ \cos t & c\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 0\\ c & -\sin t\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0 & 0\\ -\sin t & \cos t\end{vmatrix}\right)$$

$$=(-\cos t,-\sin t,0)=\vec{\boldsymbol{a}}.$$

(3) この曲線の $0\leqq t\leqq 2\pi$ の部分の長さ s を求めよ.

「道のりは速さの時間積分」だから

$$s=\int_0^{2\pi}|\vec{\boldsymbol{v}}|dt$$

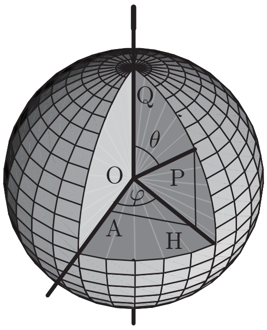
である. ところで

$$\left|\frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}\right|=|\vec{\boldsymbol{v}}|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+c^2}=\sqrt{1+c^2}$$

だから

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+c^2}dt=2\pi\sqrt{1+c^2}.$$

3. (1) 原点中心半径 $a>0$ の球面を S で表す. S 上の点 P の球面座標 θ, φ によって $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分を表わせ. (これを $=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ とおく.) また θ, φ の値の取りうる範囲を書け.



P から xy 平面に引いた垂線と xy 平面の交点を H とする．$\mathrm{OH} = a\sin\theta$ である．P の直角座標を (x, y, z) とすると

$x = \mathrm{OH}\cos\varphi = a\sin\theta\cos\varphi,$

$y = \mathrm{OH}\sin\varphi = a\sin\theta\sin\varphi,$

$z = a\cos\theta$

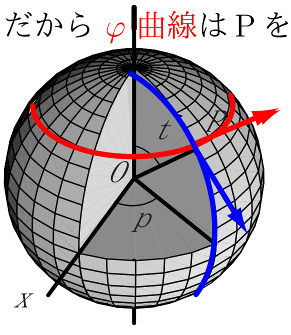
であり，また $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y, z)$ だから

$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = (a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta)$

ただし θ, φ の動く範囲は

$0 \leqq \theta \leqq \pi,\ \ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$

(2) 図を地球儀に見立てよう．φ を一定として θ だけを変化させると点 P は北極から南極に向かって南北方向に動く．だから θ 曲線は P を通る経線である．θ を一定として φ だけを変化させると点 P は xy 平面に平行に東西方向に動く．だから φ 曲線は P を通る緯線である．



(3) $\boldsymbol{r}(\theta, \varphi)$ を偏微分して得られるベクトル $\boldsymbol{r}_\theta$, $\boldsymbol{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示し，図中に書き入れよ．

$\boldsymbol{r}_\theta = ((a\sin\theta\cos\varphi)_\theta, (a\sin\theta\sin\varphi)_\theta, (a\cos\theta)_\theta) = (a\cos\theta\cos\varphi, a\cos\theta\sin\varphi, -a\sin\theta)$

は θ 曲線の接ベクトルであり南向きのベクトルで，大きさは a である．

$\boldsymbol{r}_\varphi = ((a\sin\theta\cos\varphi)_\varphi, (a\sin\theta\sin\varphi)_\varphi, (a\cos\theta)_\varphi) = (-a\sin\theta\sin\varphi, a\sin\theta\cos\varphi, 0)$

は φ 曲線の接ベクトルであり東向きのベクトルで, 大きさは $a\sin\theta$ である.

(4) $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ を a, θ, φ を用いて成分表示せよ. また, $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ と $\boldsymbol{r}$ は平行になることを確かめよ.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi \\
&\quad = \left(\begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\varphi & -a\sin\theta \\ a\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a\sin\theta & a\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & -a\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a\cos\theta\cos\varphi & a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta\sin\varphi & a\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} \right) \\
&\quad = (a^2\sin^2\theta\cos\varphi, a^2\sin^2\theta\sin\varphi, a^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + a^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi) \\
&\quad = (a^2\sin^2\theta\cos\varphi, a^2\sin^2\theta\sin\varphi, a^2\cos\theta\sin\theta) \\
&\quad = a\sin\theta(a\sin\theta\cos\varphi, a\sin\theta\sin\varphi, a\cos\theta) = a\sin\theta\boldsymbol{r}(\theta, \varphi)
\end{aligned}
$$

だから $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi$ と $\boldsymbol{r}$ は平行になる.

(5) 面積要素 $dS = |\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi|\, d\theta d\varphi$ を求めよ.

(4) より $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi = a\sin\theta\boldsymbol{r}(\theta, \varphi)$ だから $|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\varphi| = a\sin\theta|\boldsymbol{r}(\theta, \varphi)| = a^2\sin\theta$.

従って $dS = a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi$.

(6) S の面積を求めよ.

$$
\begin{aligned}
&\iint_S dS \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi \\
&\quad = \int_0^{2\pi} [-a^2\cos\theta]_0^{\pi} d\varphi \\
&\quad = \int_0^{2\pi} 2a^2 d\varphi = 4\pi a^2.
\end{aligned}
$$

(7) S の $z \geq \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ である部分 S' の面積を求めよ.

点 P がこの部分を動くとき θ, φ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ の範囲を動くので,

$$
\begin{aligned}
&\iint_{S'} dS \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\sin\theta\, d\theta d\varphi \\
&\quad = \int_0^{2\pi} \Big[-a^2\cos\theta \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\
&\quad = \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) a^2.
\end{aligned}
$$