電気数学演習 第12回 解答

1 次の積分領域を図示し二重積分を計算せよ.

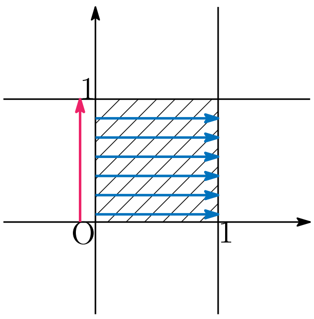
(1) $D = \{(x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

$$\iint_D (2x-y)\,dxdy$$

$D = \{(x,y)|\ 0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq 1\}$ とするとき

$$\iint_D (2x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (2x-y)\,dx\right] dy$$



y を定数とみて x で積分すると

$$= \int_0^1 \left[x^2 - xy\right]_{x\to 0}^{x\to 1} dy$$

$$= \int_0^1 (1-y)\,dy$$

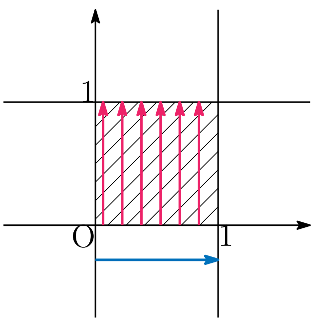
$$= \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_{y\to 0}^{y\to 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

また

$$\iint_D (2x-y)\,dxdy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 (2x-y)\,dy\right] dx$$



x を定数とみて y で積分すると

$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{1}{2}y^2\right]_{y\to 0}^{y\to 1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(2x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x}{2}\right]_{y\to 0}^{y\to 1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

でもよい.

(2) $D = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$ (R は正の定数) とするとき

$$\iint_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

極座標変換すると

$\sqrt{R^2-x^2-y^2}=\sqrt{R^2-r^2},\ \ dxdy=rdrd\theta,$
$\Omega=\{(r,\theta)\ :-\pi\leqq\theta\leqq\pi,\ 0\leqq r\leqq R\ \}$
だから
$=\iint_\Omega\sqrt{R^2-r^2}\,rdrd\theta$
累次積分すると
$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_0^R\left(\sqrt{R^2-r^2}\right)r\ dr\right]d\theta$
$R^2-r^2=t$ とおくと
$\dfrac{dt}{dr}=-2r$ だから $rdr=\dfrac{-dt}{2}$
$r=0$ のとき $t=R^2,\ r=R$ のとき $t=0$
だから
$=2\pi\int_{R^2}^0\sqrt{t}\left(\dfrac{-dt}{2}\right)=2\pi\left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{-1}{2}\right)\right]_{t\to R^2}^{t\to 0}=\dfrac{2\pi R^3}{3}$