電気数学演習　第11回　解答

1. 次の2変数関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を計算せよ。

(1)　$f(x,y) = 3xy^2$

x に関する偏微分は x のみの関数として微分することであるから, 3, y^2 は定数としてあつかうので $(\ )_x$ の外に出せる。

$$f_x(x,y) = (3xy^2)_x = 3y^2(x)_x = 3y^2\,1 = 3y^2$$

y に関する偏微分は y のみの関数として微分することであるから, 3, x は定数としてあつかうので $(\ )_y$ の外に出せる。

$$f_y(x,y) = (3xy^2)_y = 3x(y^2)_y = 3x\,2y = 6xy$$

(2)　$f(x,y) = \sin(3xy^2)$

$3xy^2 = t$ とおき合成関数の微分法を使う。

$f_x(x,y) = (\sin(3xy^2))_x = (\sin(t))_x$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_x = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_x = \cos(t) \times 3y^2 = 3y^2\cos(3xy^2)$$

$f_y(x,y) = (\sin(3xy^2))_y = (\sin(t))_y$

ここで合成関数の微分法により

$$= (\sin(t))_t \times t_y = (\sin(t))_t \times (3xy^2)_y = \cos(t) \times 6xy = 6xy\cos(3xy^2)$$

(3) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

$(xy)_x = y, (xy)_y = x,$

$(y^2)_x = 0, (x^2)_y = 0$ に注意して

$f_x(x,y) = (x^2 + xy + y^2)_x = (x^2)_x + (xy)_x + (y^2)_x = 2x + y$

$f_y(x,y) = (x^2 + xy + y^2)_y = (x^2)_y + (xy)_y + (y^2)_y = x + 2y$

(4) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$

$z = f(x,y), t = x^2 + xy + y^2$ とおくと,

$z = f(x,y)$ は $z = \sqrt{t},\ t = x^2 + xy + y^2$

の合成関数であるから, 合成関数の微分法により

$$f_x(x,y) = z_x = z_t \times t_x = (\sqrt{t})_t(x^2+xy+y^2)_x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (2x+y)$$
$$= \frac{2x+y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$$
$$f_y(x,y) = z_y = z_t \times t_y = (\sqrt{t})_t(x^2+xy+y^2)_y = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (x+2y)$$
$$= \frac{x+2y}{2\sqrt{x^2+xy+y^2}}$$

(5) $f(x,y) = \cos(3x-2y)$

$\cos(3x-2y)$ は $\cos \times (3x-2y)$ ではないから $\{\cos(3x-2y)\}_x$ を

$$\cos\{(3x-2y)_x\}, \quad -\sin\{(3x-2y)_x\}$$

などとしてはならない. sin の現れる関数を微分するときは $(\sin t)_t = \cos t$ を使わなくてはならない.

詳しく言うと, $3x-2y=t$ とおくと $z=\cos(3x-2y)$ は $z=\cos t$ と $t=3x-2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (\cos t)_t \times t_x \\ &= (\cos t)_t \times (3x-2y)_x \\ &= -\sin t \times 3 = -3\sin(3x-2y). \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (\cos t)_t \times t_y \\ &= (\cos t)_t \times (3x-2y)_y \\ &= -\sin t \times (-2) = 2\sin(3x-2y) \end{aligned}$$

(6) $f(x,y) = e^{xy}$

$xy=t$ とおいて合成関数の微分法を使う

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (xy)_x \\ &= e^t \times y = ye^{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (xy)_y \\ &= e^t \times x = xe^{xy} \end{aligned}$$

(7) $f(x,y) = e^{xy}\cos(3x-2y)$

ふたつの関数 e^{xy} と $\cos(3x-2y)$ の積とみて積の微分法を使う.

$$f_x(x,y) = (e^{xy})_x \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_x$$

(2), (3) により

$$\begin{aligned} &= ye^{xy}\cos(3x-2y) - 3e^{xy}\sin(3x-2y) \\ &= e^{xy}(y\cos(3x-2y) - 3\sin(3x-2y)) \end{aligned}$$

同様に

$$f_y(x,y) = (e^{xy})_y \cos(3x-2y) + e^{xy}\left(\cos(3x-2y)\right)_y$$

(2), (3) により

$$\begin{aligned} &= xe^{xy}\cos(3x-2y) + 2e^{xy}\sin(3x-2y) \\ &= e^{xy}(x\cos(3x-2y) + 2\sin(3x-2y)) \end{aligned}$$

(8) $f(x,y) = e^{3x-2y}$ のとき,

$3x-2y=t$ とおくと $z=e^{3x-2y}$ は $z=e^t$ と $t=3x-2y$ の合成関数になるから合成関数の微分法を使って

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (e^t)_t \times t_x \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_x \\ &= e^t \times 3 = 3e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= (e^t)_t \times t_y \\ &= (e^t)_t \times (3x-2y)_y \\ &= e^t \times (-2) = -2e^{3x-2y}. \end{aligned}$$

(9) $f(x,y) = x\sin y - \cos(xy)$

$xy=t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$(\cos(xy))_x = (\cos(t))_x = (\cos(t))_t \times t_x = (\cos(t))_t \times (xy)_x = -\sin(t)\times y = -y\sin(xy)$$
$$(\cos(xy))_y = (\cos(t))_y = (\cos(t))_t \times t_y = (\cos(t))_t \times (xy)_y = -\sin(t)\times (x) = -x\sin(xy)$$

だから

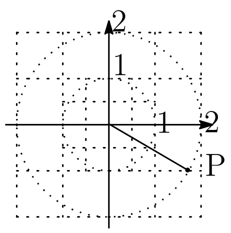
$$f_x(x,y) = (x\sin y)_x - (\cos(xy))_x = (x)_x\sin y - (\cos(xy))_x = \sin y + y\sin(xy)$$
$$f_y(x,y) = (x\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x(\sin y)_y - (\cos(xy))_y = x\cos y + x\sin(xy)$$

(10) $f(x,y) = x\cos y - \sin x\cos y + \sin(xy)$

$xy = t$ とおいて

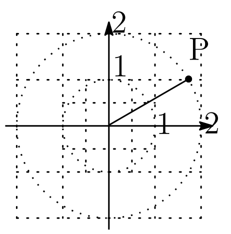
$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= (x\cos y)_x - (\sin x \cos y)_x + (\sin(xy))_x \\
&= (x)_x \cos y - (\sin x)_x \cos y + (\sin t)_t \times t_x \\
&= \cos y - \cos x \cos y + \cos t \times y \\
&= \cos y - \cos x \cos y + y\cos(xy) \\
f_y(x,y) &= (x\cos y)_y - (\sin x \cos y)_y + (\sin(xy))_y \\
&= x(\cos y)_y - \sin x(\cos y)_y + (\sin t)_t \times t_y \\
&= -x\sin y + \sin x \sin y + \cos t \times x \\
&= -x\sin y + \sin x \sin y + x\cos(xy)
\end{aligned}$$

2. (1) 直角座標 $(\sqrt{3}, -1)$ の点 P を図示し, その極座標を求めよ.



$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6}$ だから極座標は $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$.

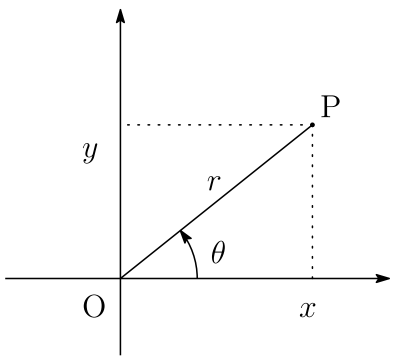
(2) 極座標 $(2, \frac{\pi}{6})$ の点 P を図示し, その直角座標を求めよ.



$x = 2\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3} \quad y = 2\sin\dfrac{\pi}{6} = 1$ だから直角座標は $(\sqrt{3}, 1)$.

3. 極座標が (r, θ) である点の直角座標を (x, y) とする.

(1) x, y を r, θ を用いて表せ.



図より $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$.

(2) このとき次の偏導関数を計算せよ.

$x_r = (r\cos\theta)_r = (r)_r \cos\theta = \cos\theta$

$x_\theta = (r\cos\theta)_\theta = r(\cos\theta)_\theta = -r\sin\theta.$

$y_r = (r\sin\theta)_r = (r)_r \sin\theta = \sin\theta$

$y_\theta = (r\sin\theta)_\theta = r(\sin\theta)_\theta = r\cos\theta.$

4. 直角座標が (x, y) である点の極座標を (r, θ) とする.

(1) r を x, y を用いて表せ.

三平方の定理により $r^2 = x^2 + y^2$ だから $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である.

(2) r は x, y の 2 変数関数であるが x に関する偏導関数 r_x を求めよ.

$$r_x = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)_x$$

$x^2 + y^2 = t$ とおくと $r = \sqrt{t}$ だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{t}\right)_t \times t_x = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2 + y^2)_x = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{t}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

(3) r_y を計算せよ.

$$r_y = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)_y$$

$x^2 + y^2 = t$ とおくと $r = \sqrt{t}$ だから合成関数の微分法を使うと

$$\begin{aligned} &= \left(\sqrt{t}\right)_t \times t_y = \left(t^{\frac{1}{2}}\right)_t \times (x^2 + y^2)_y = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \times 2y \\ &= \frac{y}{\sqrt{t}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$$

5. 直角座標が (x, y) である点の極座標を (r, θ) とする.

(1) $\sin\theta$, $\cos\theta$ を x, y を用いて表せ.

$$x = r\cos\theta \text{ だから } \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$y = r\sin\theta \text{ だから } \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(2) (1) の結果を利用して $(\sin\theta)_x$ を計算せよ.

$$(\sin\theta)_x = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_x$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_x\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_x}{x^2+y^2}$$

$(y)_x = 0$ と前問の結果 より

$$= \frac{-y\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots ①$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{-r^2\sin\theta\cos\theta}{r^3} = \frac{-\sin\theta\cos\theta}{r}$$

(3) $(\sin\theta)_x = (\sin\theta)_\theta \times \theta_x$ と (2) の結果を利用して θ_x を計算せよ.

θ は x, y の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin\theta)_x = (\sin\theta)_\theta \times \theta_x = \cos\theta \times \theta_x$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \theta_x \cdots ②$$

①=② だから

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r}$$

(4) θ_y を計算せよ.

$$(\sin\theta)_y = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_y$$

商の微分法により

$$= \frac{(y)_y\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)_y}{x^2+y^2}$$

$(y)_y = 1$ と前問の結果 より

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x^2+y^2}$$

分母分子に $\sqrt{x^2+y^2}$ をかけて

$$= \frac{x^2+y^2-y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdots ①$$

r, θ で書き直すと

$$= \frac{r^2\cos^2\theta}{r^3} = \frac{\cos^2\theta}{r}$$

一方 θ は x, y の 2 変数関数となるだろうから合成関数の微分法を使って

$$(\sin\theta)_y = (\sin\theta)_\theta \times \theta_y = \cos\theta \times \theta_x$$

(1) より

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \theta_y \cdots ②$$

①=② だから

$$\theta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

[余談] 問題 2，3，4 の結果をまとめると

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるということが出てくる。このことを確かめよ。またどうしてこうなるのか考えよ.