電気数学演習　第9回　解答

1. (1) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

だから

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

である．または

$$\frac{d}{dx}\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

だから $\left(x + \dfrac{\pi}{2} \text{ を } x \text{ でおきかえて，また } x \text{ を } x - \dfrac{\pi}{2} \text{ でおきかえて} \right)$

$$\frac{d}{dx}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

したがって

$$\int \sin x \, dx = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

でもよい。というかこっちがよい。

(2) $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

だから

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

だから

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

である．または

$$\frac{d}{dx}\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

だから $\left(x + \dfrac{\pi}{2} \text{ を } x \text{ でおきかえて，また } x \text{ を } x - \dfrac{\pi}{2} \text{ でおきかえて} \right)$

$$\frac{d}{dx}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

したがって

$$\int \cos x \, dx = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

でもよい。というかこっちがよい。

(3) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である．

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(4) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

(5) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

2. 次の不定積分，導関数を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \cos(2x-3)\, dx$

$$2x - 3 = t \qquad (*)$$

とおき，この両辺を x で微分すると

$$2 = \frac{dt}{dx}$$

となるが，この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}dt$ に置き換えればよいことが分かる．

これらにより $2x-3$, dx をおきかえると，

$$\int \cos(2x-3)\, dx = \int \cos t \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\sin t$$

$t = 2x - 3$ だから

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-3)$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)\right)$

$2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)\right)=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sin t\right)=2\dfrac{1}{2}\cos t=\cos t=\cos(2x-3)$

これは (1) の検算である。

(3) $\displaystyle\int e^{2x-3}\,dx$

(1) と同じ変換で

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx=\frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. これらにより $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3}\,dx=\int e^{t}\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}e^{t}$$

$t=2x-3$ だから

$$=\frac{1}{2}e^{2x-3}$$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x-3}\right)$

$2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x-3}\right)=\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}e^{t}\right)=2\cdot\dfrac{1}{2}e^{t}=e^{t}=e^{2x-3}$

これは (3) の検算である。

3. (1) z を複素数の定数とすると

$$\int e^{zt}dt=\frac{1}{z}e^{zt}$$

であることを確かめよ。($z\neq 0$ とせよ。)

第 8 回スライド 25 ページのことにより

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{z}e^{zt}\right) = \frac{1}{z}(ze^{zt}) = e^{zt}$$

だから正しい。

(2) $S = \displaystyle\int e^x \sin x\,dx,\ C = \int e^x \cos x\,dx$ をそれぞれ求めよ。

$$\begin{aligned} C + iS &= \int e^x (\cos x + i\sin x)\ dx \\ &= \int e^{(1+i)x}\,dx \end{aligned}$$

(1) のことにより

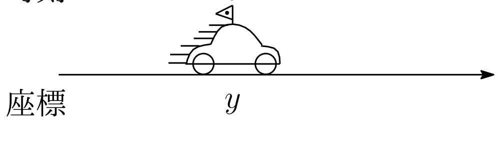
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+i}e^{(1+i)x} \\ &= \frac{1}{1+i}e^x (\cos x + i\sin x) \\ &= \frac{1-i}{2}e^x (\cos x + i\sin x) \\ &= \frac{e^x}{2}\left((\cos x + \sin x) + i(-\cos x + \sin x)\right) \\ &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + i\frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

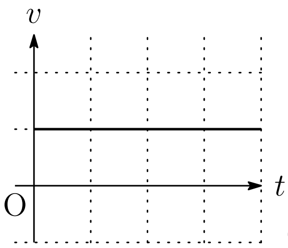
だから両辺の実部・虚部をそれぞれ比較して

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) \\ S &= \frac{1}{2}e^x(-\cos x + \sin x) \end{aligned}$$

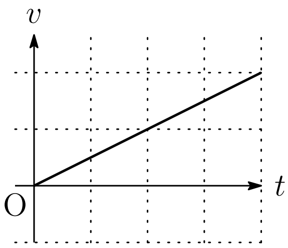
部分積分を使う方法もあるがこちらの方が楽である。

4. 数直線上を図のように運動している物体がある。時刻 t での瞬間の速度 v のグラフが (1) から (4) のようであるとき, その座標 y を表しているグラフはどれか。(a) から (e) の中から選べ。

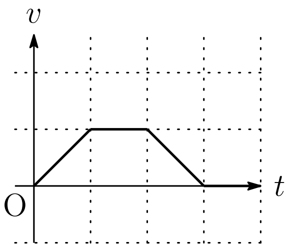




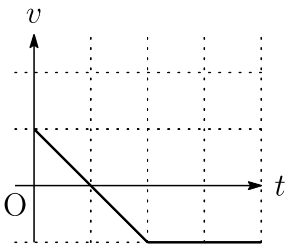
(1)



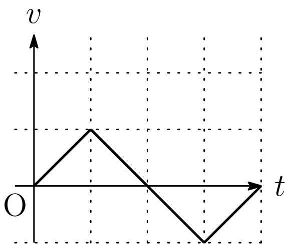
(2)



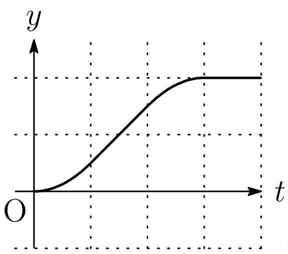
(3)



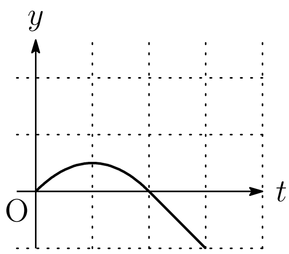
(4)



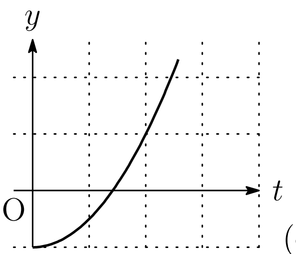
(5)



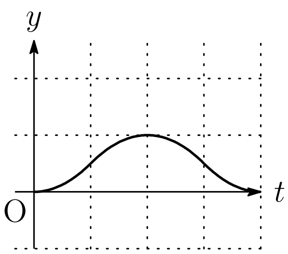
(a)



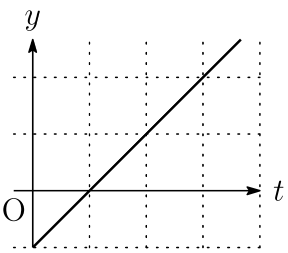
(b)



(c)



(d)



(e)

(1) は (e)　(2) は (c)　(3) は (a)　(4) は (b)　(5) は (d)

5. 次の不定積分・定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$

(4) $\displaystyle\int \sin 2x\,dx$

$2x = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ すなわち $dx = \dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int \sin(2x)\,dx = \int \sin t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x)$$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}(\cos\pi - \cos 0) = 1$

(6) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$

(7) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0$

(10) $2x = t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ すなわち $dx = \dfrac{dt}{2}$ だから

$$\int \cos(2x)\,dx = \int \cos t\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

$$(11)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\sin\pi - \sin 0\right) = 0$$

$$(12)\ \int_0^{\pi} \cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{2}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) = 0$$