電気数学演習　第8回　解答

1.

関数 $y = \sqrt{x^2+1} \cdots ⓪$ は, $x^2+1=t$ とおくと

t の関数 $y = \sqrt{t} \cdots ①$

x の関数 $t = x^2+1 \cdots ②$,

の合成関数である。

① の導関数は $\dfrac{dy}{dt} = (t^{\frac{1}{2}})' = \dfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$　(()' は t による微分)

② の導関数は $\dfrac{dt}{dx} = (x^2+1)' = 2x$　(()' は x による微分)

だから

⓪ の導関数は $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}2x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

である。

2. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = (2x-1)^{10}$ のとき $t = 2x-1$ とおく.

関数 $y = (2x-1)^{10}$ は関数 $y = t^{10}$, $t = 2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^{10}) = 10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x-1) = 2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 10\,t^9 \times 2 = 20(2x-1)^9$$

である.

(2) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t = 2x-1$ とおく. $y = \dfrac{1}{2x-1}$ は $y = \dfrac{1}{t}$, $t = 2x-1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x-1) = 2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{t^2} \times 2 = -\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{2x-1}\right)' = \frac{(1)' \times (2x-1) - 1 \times (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{0 \times (2x-1) - 1 \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}.$$

(3) $y = \sqrt{2x-1}$ のとき, $t = 2x-1$ とおく. 関数 $y = \sqrt{2x-1}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = 2x-1$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\,(2x-1) = 2$

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(4) $y = e^x$ のとき $y' = e^x$。または短く $(e^x)' = e^x$。 スライド 15 ページを見よ。

(5) $y = e^{ax}$ (a は正の定数) のとき $t = ax$ とおく.

関数 $y = e^{ax}$ は関数 $y = e^t$, $t = ax$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = a,$ また (1) より $\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^t \times a = a\,e^{ax}$

となる.

(6) $y = xe^{3x}$.

積の微分法と (5) により

$(xe^{3x})' = (x)'e^{3x} + x(e^{3x})' = e^{3x} + x(3e^{3x}) = (1+3x)\,e^{3x}.$

(7) $y = e^{x^2+2x}$. のとき $t = x^2+2x$ とおく.

関数 $y = e^{x^2+2x}$ は関数 $y = e^t$, $t = x^2+2x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2x+2, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times (2x+2) = (2x+2)\,e^{x^2+2x}$$

となる.

(8) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ のとき (5) より $(e^{-x})' = -e^{-x}$ だから

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))$$

(9) $y = \sin(3x-2)$ のとき $3x-2 = t$ とおくと $y = \sin(3x-2)$ は $y = \sin t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x-2).$$

(10) $y = \cos(3x-2)$ のとき, $3x-2 = t$ とおくと $y = \cos(3x-2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3,$

$y = \cos t$ より $\dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2).$$

(11) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$. 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(1+\cos x) - \sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}.$$

(12) $y = e^{\sin x}$ のとき $t = \sin x$ とおく.

関数 $y = e^{\sin x}$ は関数 $t = \sin x$, $y = e^t$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt} = \cos x \times e^t = e^{\sin x} \cos x$

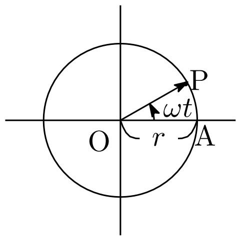
となる.

(13) $y = x \cos x$ のとき積の微分法により

$y' = (x)' \cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x \sin x$

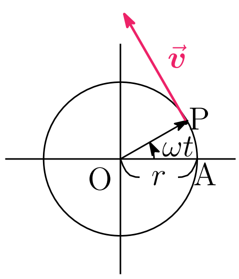
3. 点 P は原点中心半径 r の円周上を, 時刻 0 で点 $\mathrm{A}(r, 0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している.

(1) このとき, 時刻 t における P の座標を t を用いて表せ.



角速度が ω だから P は時刻 t には半径 r の円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る. だから $(r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ である.

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$ を求めよ。



速度ベクトルの成分表示は P の座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = ((r \cos \omega t)', (r \sin \omega t)') = (-r\omega \sin \omega t, r\omega \cos \omega t)$$

4. z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, $\dfrac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$ であることを確かめよ。ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

スライド 26 ページを見よ。

5. (1) $e^{\frac{\pi}{3}i}$, $e^{\frac{\pi}{6}i}$, $e^{\frac{\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{6}i}$, を複素数平面に図示せよ.

$e^{\frac{\pi}{3}i} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ だから x 座標 $= \frac{1}{2}$

$|e^{\frac{\pi}{3}i}| = \cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3} = 1$ だから単位円周上にある。

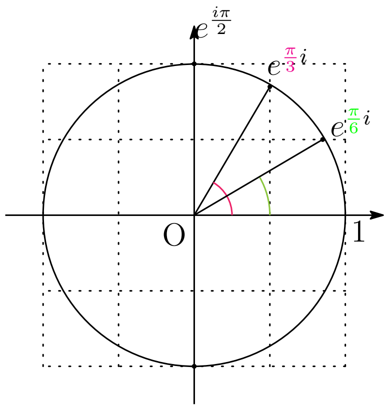
$e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ だから y 座標 $= \frac{1}{2}$

$|e^{\frac{\pi}{6}i}| = \cos^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{6} = 1$ だから単位円周上にある。

$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

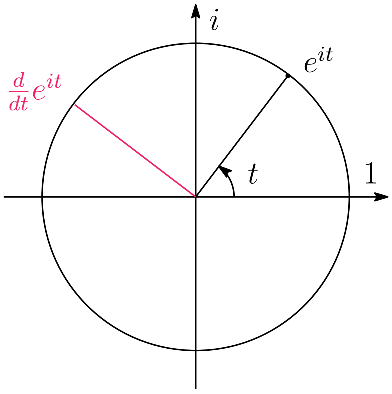
複素指数法則により

$e^{\frac{\pi}{3}i} \times e^{\frac{\pi}{6}i} = e^{\left(\frac{\pi}{3}i + \frac{\pi}{6}i\right)} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ に注意せよ.



(2) 実数 t を動かした時の e^{it} の軌跡を図示せよ.

$e^{it} = \cos t + i\sin t$ は絶対値 1, 偏角 t の複素数であるから, 図のように原点中心半径 1 の円周上にある.



(3) $\dfrac{d}{dt}e^{it}$ を計算し、図中に書き入れよ。

z が複素定数であるとき $\dfrac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$ であるから

$$\frac{d}{dt}e^{it} = ie^{it} = e^{\frac{\pi}{2}i}e^{it} = e^{i(t+\frac{\pi}{2})}$$

で, e^{it} を $\dfrac{\pi}{2}$ ラジアン回転したものになる。(速度ベクトルと同じもの。)

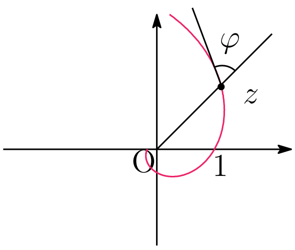
(4) $\dfrac{d}{dt}e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ を計算し、$e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ との関係を調べよ。

(3) と同様に

$$\frac{d}{dt}e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t} = (\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t} = e^{\frac{\pi}{3}i}e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$$

で, $e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ を $\dfrac{\pi}{3}$ ラジアン回転したものになる。

(5) 実数 t を動かした時の $e^{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)t}$ の軌跡がどうなるか考えよ。



図の角は常に $\dfrac{\pi}{3}$

6. 複素数値関数 $f(x)$ に対して

$$\Big(\mathbf{Re} f(x)\Big)' = \mathbf{Re}\,(f'(x)) \cdots (\star), \qquad \Big(\mathbf{Im} f(x)\Big)' = \mathbf{Im}\,(f'(x))$$

であることを利用して次の関数の導関数を計算せよ。

$(\star)$ を確かめておこう。

$$f(x) = \mathbf{Re} f(x) + i\mathbf{Im} f(x)$$

だから

$$(f(x))' = (\mathbf{Re} f(x))' + i\,(\mathbf{Im} f(x))'$$

ここで $(\mathbf{Re} f(x))'$ と $(\mathbf{Re} f(x))'$ は実数値だから

$$\mathbf{Re}(f(x))' = (\mathbf{Re} f(x))'$$
$$\mathbf{Im}(f(x))' = (\mathbf{Im} f(x))'$$

(1) $y = e^{2x}\cos(3x) = \mathbf{Re}(e^{(2+3i)x})$ だから

$$y' = \Big(\mathbf{Re}(e^{(2+3i)x})\Big)' = \mathbf{Re}\,\big((e^{(2+3i)x})'\big) = \mathbf{Re}\,\big((2+3i)\,e^{(2+3i)x}\big)$$
$$= e^{2x}\mathbf{Re}\,((2+3i)\,(\cos(3x) + i\sin(3x))) = e^{2x}\,((2\cos(3x) - 3\sin(3x)))$$

積の微分法を使うより少し楽である。?

(2) $y = e^{2x}\sin(3x) = \mathbf{Im}(e^{(2+3i)x})$ だから

$$y' = \Big(\mathbf{Im}(e^{(2+3i)x})\Big)' = \mathbf{Im}\,\big((e^{(2+3i)x})'\big) = \mathbf{Im}\,\big((2+3i)\,e^{(2+3i)x}\big)$$
$$= e^{2x}\mathbf{Im}\,((2+3i)\,(\cos(3x) + i\sin(3x))) = e^{2x}\,((3\cos(3x) + 2\sin(3x)))$$