電気数学演習　No.4　解説

1. $\vec{\boldsymbol{i}} = (1,0,0)$, $\vec{\boldsymbol{j}} = (0,1,0)$, $\vec{\boldsymbol{k}} = (0,0,1)$ とする。3 つのベクトルの組 $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ はこの順序で右手系である。次の組が右手系であるか左手系であるかどちらでもないかを判定せよ。

スライド 11 ページの判定条件を使うのが最も確実であるが、図を書いて考えると早くてわかりやすい場合もある。

(1) $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ はどちらでもない。なぜなら

これで張られる平行 6 面体は xy 平面内につぶれて体積 $= 0$ となるから。

(2) $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ は定義より右手系。

(3) $\{\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ は $\vec{\boldsymbol{i}} \bullet (\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ だから左手系。

(4) $\{\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{k}}\}$ は $\vec{\boldsymbol{j}} \bullet (\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 > 0$ だから左手系。

(5) $\{\vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}}\}$ は $\vec{\boldsymbol{j}} \bullet (\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$ だから右手系。

(6) $\{\vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}\}$ は $\vec{\boldsymbol{k}} \bullet (\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$ だから右手系。

(7) $\{\vec{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{i}}\}$ は $\vec{\boldsymbol{k}} \bullet (\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$ だから左手系。

2. $\vec{\boldsymbol{i}}$, $\vec{\boldsymbol{j}}$, $\vec{\boldsymbol{k}}$ は (1) と同じ。次の外積を $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。。

スライド 8 ページのことを使って成分から計算するのが確実であるが、次のように考えてもよい。

(i) 定義より平行なベクトルの外積は $\vec{\mathbf{0}}$ だから (1), (5), (9) は $\vec{\mathbf{0}}$.

(ii) $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ はすべて大きさ 1 であり互いに垂直であるから，これらの外積は $\pm\vec{\boldsymbol{i}}, \pm\vec{\boldsymbol{j}}, \pm\vec{\boldsymbol{k}}$ のどれかになる。

(iii) $\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ を $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ のどれかとして，$\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}\}$ がこの順序で右手系ならば $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}$。左手系ならば $\{\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, -\vec{\boldsymbol{c}}\}$ が右手系になるので $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{c}}$。

(1) $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\mathbf{0}}$

(2) $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\boldsymbol{k}}$

(3) $\vec{\boldsymbol{i}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = -\vec{\boldsymbol{j}}$

(4) $\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = -\vec{\boldsymbol{k}}$

(5) $\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = \vec{\mathbf{0}}$

(6) $\vec{\boldsymbol{j}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{i}}$

(7) $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{i}} = \vec{\boldsymbol{j}}$

(8) $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{j}} = -\vec{\boldsymbol{i}}$

(9) $\vec{\boldsymbol{k}} \times \vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\mathbf{0}}$

3. $\vec{\boldsymbol{a}}_1 = (1, 2, 0)$, $\vec{\boldsymbol{a}}_2 = (0, 3, 1)$, $\vec{\boldsymbol{a}}_3 = (-1, 1, 2)$ とするとき次のものを求めよ。

(1) $\vec{\boldsymbol{a}}_1 \times \vec{\boldsymbol{a}}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = (2, -1, 3)$

[別解] 行列式の展開

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{21} \\ a_{33} & a_{31} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

と同じ計算で

$$\begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \vec{\boldsymbol{i}} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + \vec{\boldsymbol{j}} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} + \vec{\boldsymbol{k}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}, a_{12}, a_{13}) \times (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

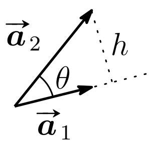
とできるからこれを利用して

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = (1,2,0) \times (0,3,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k} = (2,-1,3)$$

としてもよい。

(2)　$\vec{a}_3 \bullet (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) = (-1,1,2) \bullet (2,-1,3) = -2 - 1 + 6 = 3$

(3)　$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ で張られる平行四辺形の面積 S



$$S^2 = (|\vec{a}_1|h)^2 = |\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2|\sin\theta|^2 = |\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2(1 - |\cos\theta|^2)$$
$$= |\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2 - (\vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2)^2$$

であるが

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{5},\ |\vec{a}_2| = \sqrt{10},\ \vec{a}_1 \bullet \vec{a}_2 = 6$$

だから

$S = \sqrt{14}$

[別解]　$S = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = |(2,-1,3)| = \sqrt{14}$ でもよい。

(4)　$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ で張られる平行 6 面体の体積 V

$V = |\vec{a}_3 \bullet (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)| = 3$

(5)　$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ で張られる平面と点 $(-1,1,2)$ の距離

これは平行 6 面体の高さに当たるから $\dfrac{V}{S} = \dfrac{3\sqrt{14}}{14}$