電気数学演習 No.3 解説

1. 平面に 2 点 A$(-3,4)$, B$(2,1)$ がある。

(1) A B を結ぶベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分表示をかけ。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,1) - (-3,4) = (2-(-3), 1-4) = (5,-3)$$

(2) AB を 2:1 に内分する点 P の座標を求めよ。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{1+2} = \frac{(-3,4)+2(2,1)}{1+2} = \left(\frac{1}{3}, 2\right)$$

だから P の座標は $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$

(3) A, B を通る直線のパラメータ表示をかけ。（パラメータは t とする。）

直線上の任意の点を P とするとある実数 t が存在して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-3,4) + t(5,-3) = (5t-3, -3t+4)$$

と表される。これが t をパラメータとする直線のパラメータ表示である。

(4) (3) の表示から t を消去して方程式表示を作れ。

P の座標を (x,y) とおくと (3) より

$$\begin{cases} x = 5t-3, \cdots ① \\ y = -3t+4, \cdots ② \end{cases}$$

これから t を消去し x, y が満たす関係式を作る。

① を t について解いて $t = \dfrac{x+3}{5}$。 これを ② に代入して整理すると

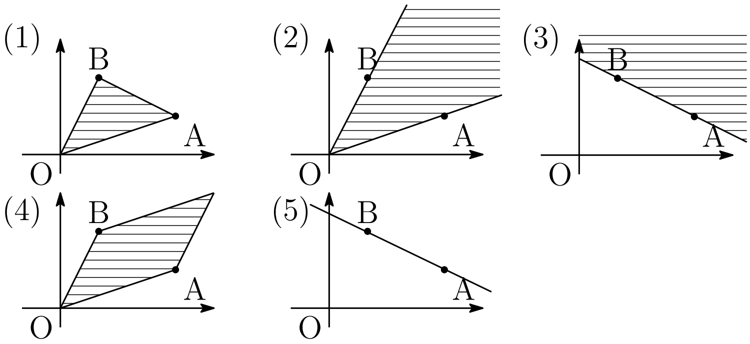
$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{11}{5}$$

これが直線 AB の方程式である。

2. 平面に 2 点 A$(3,1)$, B$(1,2)$ がある。

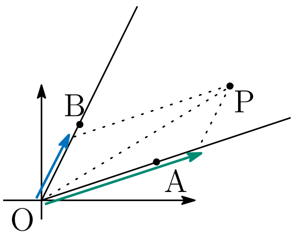
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, ($t, s$ は実数)

とする。P が図のような図形内にあるための t, s のみたす条件をかけ。



(1) $t+s \leqq 1, t \geqq 0, s \geqq 0.$　(スライド 6 ページを見よ。)

(2)



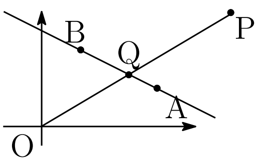
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}},$

であるが P がこの範囲にあるためには,

$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が同じ向きで $t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が同じ向き

でなくてはならないから $t \geqq 0,\ s \geqq 0$。

(3)



図形内の任意の点を P とする。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ (t,\ s$ は適当な実数$)\ \cdots$①

と書ける。ここで図のように点 Q をとると

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = r\overrightarrow{\mathrm{OP}},\quad 0 < r \leqq 1\quad \cdots$②

と書けるが, ①, ② をあわせて

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = rt\overrightarrow{\mathrm{OA}} + rs\overrightarrow{\mathrm{OB}},$

Q は直線 AB 上にあるから (5) の結論を使うと $rt+rs=1$ がわかるから

$$t+s = \frac{1}{r} \geqq 1.$$

(4) P が平行四辺形内にあるとすると, (2) の図において

$t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が同じ向きで さらに $|t\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$,

$s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が同じ向きで さらに $|s\overrightarrow{\mathrm{OB}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

だから $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$。

(5) は, スライド 4 ページの [1] で $(1-t), t$ を t, s におきかえることにより $t+s=1$

3. $\vec{\boldsymbol{a}} = (\sqrt{2}, 2, 3\sqrt{2})$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (1, \sqrt{2}, 1)$ とする。 次のものを求めよ。

(1) $|\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$

(2) $|\vec{\boldsymbol{b}}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2$

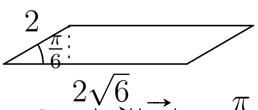
(3) $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

(4) $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|} = \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{6} \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(5) $\vec{\boldsymbol{a}}$, $\vec{\boldsymbol{b}}$ が張る平行四辺形の面積。



$$S = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\sin\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{6}$$

4. 2 点 $\mathrm{A}(1, -3, 2)$, $\mathrm{B}(5, 2, 4)$ をとおる直線のパラメータ表示をかけ。

P を直線上の任意の点として

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1, -3, 2) + t\{(5, 2, 4) - (1, -3, 2)\} = (1, -3, 2) + t(4, 5, 2)$$
$$= (4t+1, 5t-3, 2t+2)$$