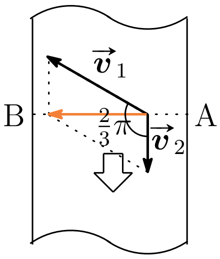
電気数学演習　No.2　解説

1. 幅の広いベルトコンベアが速度 $\vec{v}_2$ で動いている。これを真っすぐに横切って A 地点から B 地点まで渡りたい。そのためにはベルトコンベア上をどういう角度と速さで歩けばよいか。その速度ベクトル $\vec{v}_1$ を求めよ。ただし $|\vec{v}_1| = 2|\vec{v}_2|$ とする。



$\vec{v}_1$ の成分表示を　$\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y})$,　とおく。

$\vec{v}_2$ は下向きだから成分表示は $\vec{v}_2 = (0, -|\vec{v}_2|)$ とおける。

この人の地面に対する速度は, ベルトコンベアに対する速度 $\vec{v}_1$ とベルトコンベアの速度 $\vec{v}_2$ の和 $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ である。このベクトルの成分表示は

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x}, v_{1y}) + (0, -|\vec{v}_2|) = (v_{1x}, v_{1y} - |\vec{v}_2|)$

これが AB 方向なのだから

$v_{1y} - |\vec{v}_2| = 0$ したがって $v_{1y} = |\vec{v}_2|$.

また

$|\vec{v}_1|^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{1x}^2 + |\vec{v}_2|^2$

であるがここで $|\vec{v}_1| = 2|\vec{v}_2|$ だから

$= 4|\vec{v}_2|^2$

したがって $v_{1x}^2 = 3|\vec{v}_2|^2$. また図より $v_{1x} < 0$ だから

$v_{1x} = -\sqrt{3}|\vec{v}_2|$

以上から

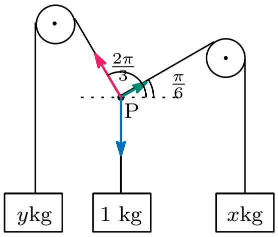
$\vec{v}_1 = (-\sqrt{3}|\vec{v}_2|, |\vec{v}_2|)$

となり $\vec{v}_1$ が求められた。$\vec{v}_2$ とのなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|} = -\frac{1}{2}$$

したがって $\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ となり $\vec{v}_1$ は図のようになる。

2. 図のような状態で点 P は静止している。おもりの重さ x, y を求めよ。



3 本のひもから点 P にかかる力を $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ とする。P は静止しているから

$$\vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = \vec{0} \quad \cdots (\star)$$

角の条件を考慮すると成分表示は

$$\vec{f}_1 = (0, -|\vec{f}_1|),$$
$$\vec{f}_2 = (|\vec{f}_2|\cos\tfrac{\pi}{6}, |\vec{f}_2|\sin\tfrac{\pi}{6}) = (\tfrac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_2|, \tfrac{1}{2}|\vec{f}_2|)$$
$$\vec{f}_3 = (|\vec{f}_3|\cos\tfrac{2\pi}{3}, |\vec{f}_3|\sin\tfrac{2\pi}{3}) = (-\tfrac{1}{2}|\vec{f}_3|, \tfrac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_3|)$$

となるからこれらを $(\star)$ に代入すると

$$\left(0 + \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_2| - \frac{1}{2}|\vec{f}_3|, -|\vec{f}_1| + \frac{1}{2}|\vec{f}_2|\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_3|\right) = (0, 0)$$

成分ごとに計算すると

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_2| - \frac{1}{2}|\vec{f}_3| = 0, \\ -|\vec{f}_1| + \frac{1}{2}|\vec{f}_2| + \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_3| = 0 \end{cases}$$

これを $|\vec{f}_2|, |\vec{f}_2|$ について解くと

$$|\vec{f}_2| = \frac{1}{2}|\vec{f}_1|, \quad |\vec{f}_3| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{f}_1|$$

ここで $|\vec{f}_1| : |\vec{f}_2| : |\vec{f}_3| = 1 : x : y$ だから

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. 図は一辺が 1 の正 6 角形である。次のものを求めよ

現れている 3 角形はすべて辺の長さが 1 の正三角形で, 角はすべて $\dfrac{\pi}{3}$ (ラジアン) であることに注意せよ。解法はたくさんあるから工夫してラクなやり方を見つけてください。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AO}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AO}}|\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}}$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ だから

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet (\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})$

内積の性質 [I],[VI] を使って

$$= |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \frac{3}{2}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{BF}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet (\overrightarrow{\mathrm{BO}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet (\overrightarrow{\mathrm{AF}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AF}} - |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AF}} = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AF}}| \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ だから

$$= -\frac{3}{2}$$

(5) $(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AF}}) \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k。

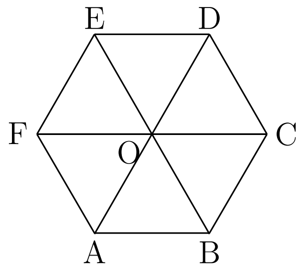
直交するから

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{AF}}) \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

となる。これを展開すると

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + k\overrightarrow{\mathrm{AF}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 1 - \frac{k}{2} = 0$$

したがって $k = 2.$



4. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の成分表示を $\vec{a} = (1, -\sqrt{3}),\ \vec{b} = (\sqrt{3}, -1)$ とする。次のものを求めよ。

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

(2) $|\vec{b}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$

(3) $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1 \times \sqrt{3} + (-1) \times (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

(4) $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

だから $\theta = \frac{\pi}{6}$

5. $\vec{\boldsymbol{a}} = (2, k)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (3, 2k-1)$ が平行となるように実数 k を決めよ。

平行となるためには, ある実数 c があって $\vec{\boldsymbol{b}} = c\vec{\boldsymbol{a}}$ となればよい。成分表示を代入すると

$(3, 2k-1) = c(2, k)$,

成分ごとに比較して

$$\begin{cases} 3 = 2c \\ 2k - 1 = ck \end{cases}$$

これを解いて $c = \dfrac{3}{2}$, $k = 2$.

6. $\vec{\boldsymbol{a}} = (4, -3)$, $\vec{\boldsymbol{b}} = (2k, k+1)$ が垂直となるように実数 k を決めよ。

$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = 0$

となればよい。成分表示を代入して

$8k - 3(k+1) = 5k - 3 = 0$

したがって $k = \frac{3}{5}$

7. $|\vec{\boldsymbol{a}}| = 2 \cdots ①$, $|\vec{\boldsymbol{b}}| = 3 \cdots ②$, $|3\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}| = 7 \cdots ③$, のとき $\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}}$ を求めよ。

③ より

$|3\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}|^2 = 49$

$$\text{左辺} = (3\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) \bullet (3\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) = 9|\vec{a}|^2 + 6\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + |\vec{\boldsymbol{b}}|^2$$

①, ② を代入して

$$= 9 \times 4 + 6\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} + 9$$

したがって

$$\vec{\boldsymbol{a}} \bullet \vec{\boldsymbol{b}} = \frac{2}{3}$$