本日やること

1. 2 変数関数
    - 高階偏導関数
    - Taylor 近似多項式
    - 極値問題

2 変数関数
高階偏導関数

[高階偏導関数]
2 変数関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がさらに偏微分可能ならば

$$(f_x(x, y))_x, \quad (f_x(x, y))_y, \quad (f_y(x, y))_x, \quad (f_y(x, y))_y$$

を作ることができる．これら 4 つを 2 階 (または 2 次) 偏導関数と呼び，記号

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}, \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で表す．
同様に n 階 (n 次) 偏導関数 $(n = 2, 3, \ldots)$ も定義される．これらを総称して高階 (高次) 偏導関数という．
関数 $z = f(x, y)$ の n 次までの全ての偏導関数が存在してさらに連続関数になるとき，$f(x, y)$ は n 回連続微分可能であるという．1 回連続微分可能であることを単に連続微分可能という．

2 変数関数

高階偏導関数

[注意]　関数 $z = f(x, y)$ が n 回連続微分可能のときは n 次までの偏微分の順序は交換できる：

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}, \cdots$$

2 変数関数

Taylor 近似多項式

復習：1 変数関数の Taylor 近似多項式

$f(x)$: n 回連続微分可能，　a : 定数

に対して n 次多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で決めると

$$f(a) = P(a),\ f'(a) = P'(a),\ f''(a) = P''(a), \cdots\ f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

となりその結果

$$x \fallingdotseq a \ \Rightarrow\ f(x) \fallingdotseq P(x)$$

となることが知られている。

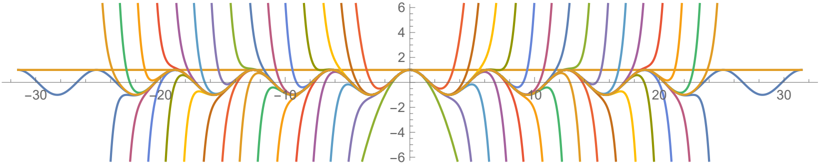
2 変数関数

Taylor 近似多項式

[例]　$\cos x$ の $a = 0$ としたときの 60 次までの近似多項式は

$$P_{60}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{60}}{60!}$$

$P_0(x), \cdots, P_{60}(x)$ のグラフをすべて書くと



2 変数関数

2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の定義

$f(x,y)$：2 回連続微分可能,　　a, b：定数

に対して, $f(x,y)$ の点 (a,b) における 2 次の Taylor 近似多項式 $P(x,y)$ を

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2
\end{aligned}
$$

で定める。

2 変数関数

2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の性質

$P(x, y)$ は次の性質を持つ。

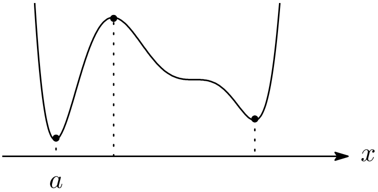
(i) $$f(a,b) = P(a,b),\ f_x(a,b) = P_x(a,b),\ f_y(a,b) = P_y(a,b),$$
$$f_{xx}(a,b) = P_{xx}(a,b),\ f_{xy}(a,b) = P_{xy}(a,b),\ f_{yy}(a,b) = P_{yy}(a,b)$$

(ii) $$(x,y) \fallingdotseq (a,b) \ \Rightarrow\ f(x,y) \fallingdotseq P(x,y)$$

2 変数関数

極値問題

復習：1 変数関数の極値の判定



$y = f(x)$ が 2 回連続微分可能のとき

(i) 極値の必要条件

a で極大 (小) $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$

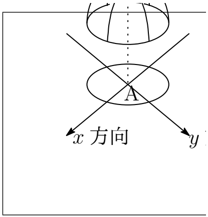
(ii) 極値の十分条件

$f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$ (> 0)

$\Rightarrow$ a で極大 (小)

2 変数関数
極値問題

[2 変数関数の極値]



$f(x,y)$ が点 A(a,b) で極大 (または極小) であるとは

「ある数 $\delta > 0$ があって
AP $< \delta$, A$\neq$P $\Rightarrow$
$f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$)」

となることであると定める.
要するに, 定義域を適当に小さい円に限れば点 A で最大 (または最小) になるということ.
このときの値 $f(a,b)$ を極大値 (または極小値) という.
また, $<$ を $\leqq$ (または $>$ を $\geqq$) でおきかえた式が成り立つとき広義の極大 (または広義の極小) になるといい, このときの $f(a,b)$ の値を広義の極大値 (または広義の極小値) という.
極大値と極小値をあわせて極値という.

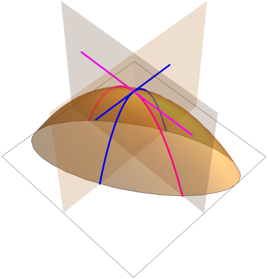
2 変数関数

極値問題

極値をとるための必要条件

$f(x,y)$ が偏微分可能のとき

$$\text{A}(a,b) \text{ で極値をとる } \Rightarrow f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$



[確かめ]

x 方向接線, y 方向接線の傾きが 0 になるから明らかである。

2 変数関数

極値問題

極値の判定法

$f(x, y)$ は 2 回連続微分可能とし,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

とする.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

とおく. このとき関数 $f(x, y)$ は

(i) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極小.
$D > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極大.

(ii) $D < 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極値をとらない.

2 変数関数
極値問題

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
(x, y) &\fallingdotseq (a, b), \qquad (x, y) \neq (a, b), \\
P(x, y) &= f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y-b)^2
\end{aligned}
$$

(Taylor 近似多項式)

とすると

$f(x, y)$ が (a, b) で極大 (小) $\iff$ $P(x, y)$ が (a, b) で極大 (小)

が分かっているので，$P(x, y)$ の極値を調べればよいことになる。

2 変数関数

極値問題

$$h = x - a,\ k = y - b,\ \Delta f = f(x, y) - f(a, b) \fallingdotseq P(x, y) - P(a, b),$$
$$A = f_{xx}(a, b),\ B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b),\ C = f_{yy}(a, b)$$

とおくと

$$\Delta f = \frac{1}{2}\{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

という 2 次形式になる。これの符号を調べる。

適当な直行行列 $\boldsymbol{T}$ による変数変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ により標準形に直すと

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ は } \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ の固有値}$$

に変形できる。

2 変数関数

極値問題

固有値は固有方程式

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = \lambda^2 - (A+C)\lambda + D = 0$$

の解である。係数行列は対称行列だから 2 つの実数の固有値を持つ。固有値は

$$\frac{1}{2}\left((A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4D}\right)$$

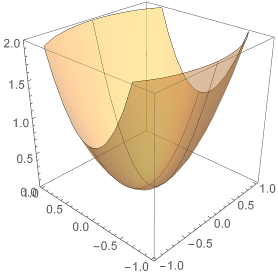
だから

固有値が同符号 $\iff D > 0$

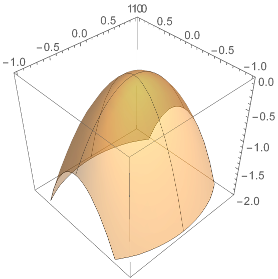
(i) $D > 0$ のとき。 $AC > B^2 \geqq 0$ より A, C は同符号
(i-i) さらに $A > 0$ のとき 固有値はともに正。このとき恒に $\Delta f > 0$ したがって (a, b) で極小。
(i-ii) さらに $A < 0$ のとき 固有値はともに負。だから極大。
(ii) $D < 0$ のとき。 符号の異なる 2 つの固有値を持つ。このとき Δf の符号は (ξ, η) によって変わるから極値をとらない。

2 変数関数

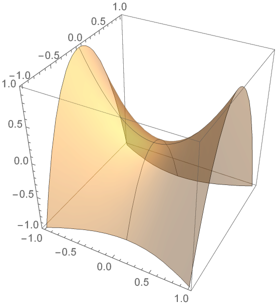
極値問題



(a) (i-i)



(b) (i-ii)



(c) (ii)