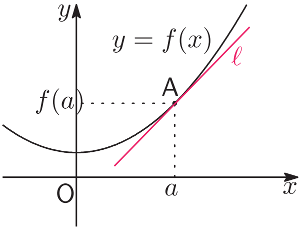
本日やること

1. 2 変数関数
   - 復習：接平面
   - 合成関数の微分法
   - 極座標
   - 高階偏導関数
   - Taylor 近似多項式
   - 極値問題

2 変数関数
復習：接平面

[復習：1 変数関数 $y = f(x)$ の場合]

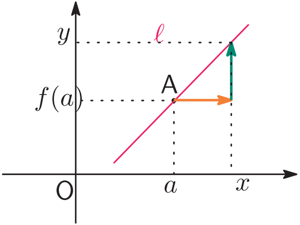


曲線 $y = f(x)$ において

A$(a, f(a))$ を通る接線 ℓ の傾き $= f'(a)$

だから接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

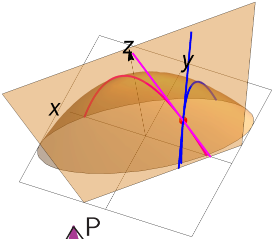


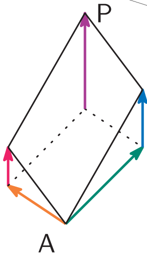
ℓ の任意の点を P(x, y) とすると

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

2 変数関数
復習：接平面

[2 変数関数 $z = f(x, y)$ の場合]





A$(a, b, f(a, b))$ における

x 方向接線の傾き $= f_x(a, b)$,

y 方向接線の傾き $= f_y(a, b)$,

だから接平面の方程式は (多くの場合)

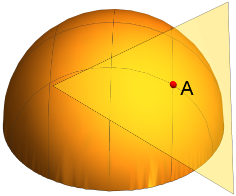
$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad \cdots (\star)$$

接平面上の任意の点を P(x, y, z) とすると

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

2 変数関数
復習：接平面

[例：球面の接平面] $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ $(=f(x,y)$ とおく) のグラフは上半球面



A$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ における接平面を求める。

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ だから } f_x\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \text{ だから } f_y\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

したがって接平面の方程式は

$$z-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(y-\tfrac{1}{2}\right)$$

整理して

$$z=\frac{-x-y+2}{\sqrt{2}}$$

2 変数関数
合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法

(i) $z = g(t)$:微分可能, $t = f(x, y)$:偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = g(f(x, y))$ も偏微分可能で

$$z_x = t_x z_t, \qquad x_y = t_y z_t$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "t_x"] & & \\
& t \arrow[r, "z_t"] & z \\
y \arrow[ur, "t_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

すでに何回も使っている。

[例] $z = \sin(xy)$ のとき $xy = t$ とおいて

$$z_x = z_t t_x = (\sin t)_t (xy)_x = \cos t \cdot y = y \cos(xy)$$

2 変数関数

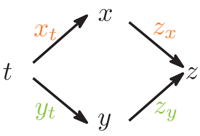
合成関数の微分法

2 変数関数の合成関数の微分法 (続き)

(ii) $z = f(x, y)$: 偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$: 微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(t), \psi(t))$ も微分可能で



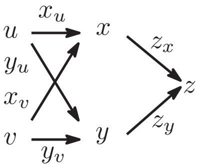
$$z_t = x_t z_x + y_t z_y \cdots (\star\star)$$

(iii) $z = f(x, y)$ が偏微分可能かつ偏導関数が連続,

$x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$: 偏微分可能

$\Longrightarrow$ 合成関数 $z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} z_u = x_u z_x + y_u z_y \\ z_v = x_v z_x + y_v z_y \end{cases}$$



2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ]　t が Δt だけ変化するとき x, y, z は

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)\\
\Delta y &= \psi(t+\Delta t) - \psi(t)\\
\Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \Delta x & & \\
 & & x \arrow[dr] & & \\
\Delta t & t \arrow[ur] \arrow[dr] & & z & \Delta z \\
 & & y \arrow[ur] & & \\
 & & \Delta y & &
\end{tikzcd}$$

だけ変化する．ここで方向微分と同様の議論をすると,

$$\begin{aligned}
\Delta z &= \Big(f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)\Big) + \Big(f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\Big)\\
&= \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\Delta x + \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\Delta y\\
&\fallingdotseq f_x(x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y,
\end{aligned}$$

2 変数関数
合成関数の微分法

[(ii) の確かめ (続き)]
両辺を $\varDelta t$ で割って

$$\frac{\varDelta z}{\varDelta t} \fallingdotseq f_x(x, y+\varDelta y)\frac{\varDelta x}{\varDelta t} + f_y(x, y)\frac{\varDelta y}{\varDelta t}$$

$\varDelta t \to 0$ とすると

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t} \to \frac{dx}{dt} = x_t \qquad \frac{\varDelta y}{\varDelta t} \to \frac{dy}{dt} = y_t$$
$$f_x(x, y+\varDelta y) \to f_x(x, y) = z_x,$$

となり近似の $\fallingdotseq$ も $=$ となるので

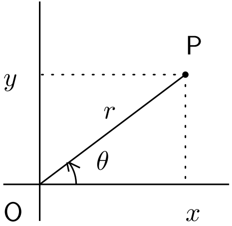
$$\frac{\varDelta z}{\varDelta t} \to (\star\star) \text{ の右辺}$$

がわかる.

2 変数関数

平面の極座標

平面の極座標



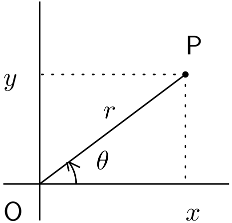
P の直交座標：(x, y)

P の極座標：(r, θ)

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 1



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

だから

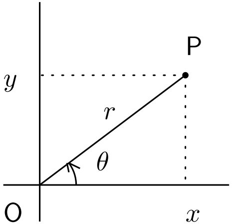
$$x_r = \cos\theta \qquad x_\theta = -r\sin\theta$$

$$y_r = \sin\theta \qquad y_\theta = r\cos\theta$$

2 変数関数

平面の極座標

直交座標と極座標の関係　その 2



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

だから

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta \qquad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\theta_x = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-\sin\theta}{r} \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

2 変数関数

高階偏導関数

[高階偏導関数]
2 変数関数 $z = f(x, y)$ の偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ がさらに偏微分可能ならば

$$(f_x(x, y))_x, \quad (f_x(x, y))_y, \quad (f_y(x, y))_x, \quad (f_y(x, y))_y$$

を作ることができる．これら 4 つを 2 階 (または 2 次) 偏導関数と呼び，記号

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}, \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

で表す．
同様に n 階 (n 次) 偏導関数 $(n = 2, 3, \ldots)$ も定義される．これらを総称して高階 (高次) 偏導関数という．
関数 $z = f(x, y)$ の n 次までの全ての偏導関数が存在してさらに連続関数になるとき，$f(x, y)$ は n 回連続微分可能であるという．1 回連続微分可能であることを単に連続微分可能という．

2 変数関数

高階偏導関数

[注意]　関数 $z = f(x, y)$ が n 回連続微分可能のときは n 次までの偏微分の順序は交換できる：

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}, \quad f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}, \cdots$$

2 変数関数

Taylor 近似多項式

復習：1 変数関数の Taylor 近似多項式

$f(x)$：n 回連続微分可能，　　a：定数

に対して n 次多項式 $P(x)$ を

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

で決めると

$$f(a) = P(a),\ f'(a) = P'(a),\ f''(a) = P''(a), \cdots\ f^{(n)}(a) = P^{(n)}(a)$$

となりその結果

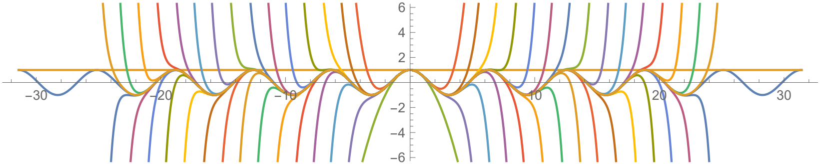
$$x \fallingdotseq a \ \Rightarrow\ f(x) \fallingdotseq P(x)$$

となることが知られている。

2 変数関数

Taylor 近似多項式

[例] $\cos x$ の 60 次までの近似多項式



2 変数関数

2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の定義

$f(x,y)$: 2 回連続微分可能,　　a, b : 定数

に対して, $f(x,y)$ の点 (a,b) における 2 次の Taylor 近似多項式 $P(x,y)$ を

$$
\begin{aligned}
P(x,y) &= f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\
&\qquad + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2
\end{aligned}
$$

で定める。

2 変数関数

2 変数関数の Taylor 近似多項式

2 変数関数の Taylor 近似多項式の性質

$P(x,y)$ は次の性質を持つ。

(i) $$f(a,b)=P(a,b),\ f_x(a,b)=P_x(a,b),\ f_y(a,b)=P_y(a,b),$$
$$f_{xx}(a,b)=P_{xx}(a,b),\ f_{xy}(a,b)=P_{xy}(a,b),\ f_{yy}(a,b)=P_{yy}(a,b)$$

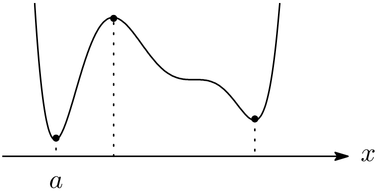
(ii) $$(x,y)\fallingdotseq(a,b)\ \Rightarrow\ f(x,y)\fallingdotseq P(x,y)$$

となることが知られている。

2 変数関数

極値問題

復習：1 変数関数の極値の判定



$y = f(x)$ が 2 回連続微分可能のとき

(i) 極値の必要条件

a で極大 (小) $\Rightarrow$ $f'(a) = 0$

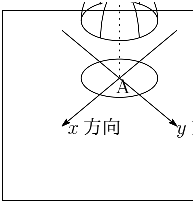
(ii) 極値の十分条件

$f'(a) = 0,\ f''(a) < 0\ (> 0)$

$\Rightarrow$ a で極大 (小)

2 変数関数
極値問題

[2 変数関数の極値]



$f(x,y)$ が点 A(a,b) で極大 (または極小) であるとは

「ある数 $\delta > 0$ があって
AP $< \delta$, A$\neq$P $\Rightarrow$
$f(x,y) < f(a,b)$ (または $f(x,y) > f(a,b)$)」

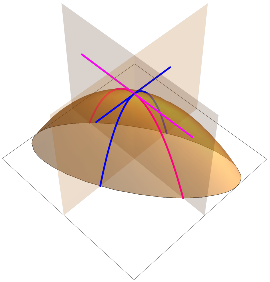
となることであると定める.
要するに, 定義域を適当に小さい円に限れば点 A で最大 (または最小) になるということ.
このときの値 $f(a,b)$ を極大値 (または極小値) という.
また, $<$ を $\leqq$ (または $>$ を $\geqq$) でおきかえた式が成り立つとき広義の極大 (または広義の極小) になるといい, このときの $f(a,b)$ の値を広義の極大値 (または広義の極小値) という.
極大値と極小値をあわせて極値という.

2 変数関数
極値問題

極値をとるための必要条件

$f(x,y)$ が偏微分可能のとき

$$\text{A}(a,b) \text{ で極値をとる} \Rightarrow f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$



[確かめ]

x 方向接線, y 方向接線の傾きが 0 になるから明らかである。

2 変数関数

極値問題

極値の判定法

$f(x, y)$ は 2 回連続微分可能とし,

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

とする.

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - \{f_{xy}(a, b)\}^2$$

とおく. このとき関数 $f(x, y)$ は

(i) $D > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極小.
$D > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極大.

(ii) $D < 0 \Rightarrow$ 点 (a, b) で極値をとらない.

2 変数関数
極値問題

[確かめ]

$$
\begin{aligned}
&(x,y) \fallingdotseq (a,b), \qquad (x,y) \neq (a,b), \\
&P(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2} f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a,b)(y-b)^2
\end{aligned}
$$

(Taylor 近似多項式)

とすると

$f(x,y)$ が (a,b) で極大 (小) $\iff$ $P(x,y)$ が (a,b) で極大 (小)

が分かっているので, $P(x,y)$ の極値を調べればよいことになる。

2 変数関数

極値問題

$$h = x - a,\ k = y - b,\ \Delta f = f(x, y) - f(a, b) \fallingdotseq P(x, y) - P(a, b),$$
$$A = f_{xx}(a, b),\ B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b),\ C = f_{yy}(a, b)$$

とおくと

$$\Delta f = \frac{1}{2}\{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2\} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

という 2 次形式になる。これの符号を調べる。
適当な直行行列 $\boldsymbol{T}$ による変数変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ により標準形に直すと

$$\Delta f = \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2, \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ は } \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \text{ の固有値}$$

に変形できる。

2 変数関数

極値問題

固有値は固有方程式

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+B)\lambda + D = 0$$

の解である。判別式は

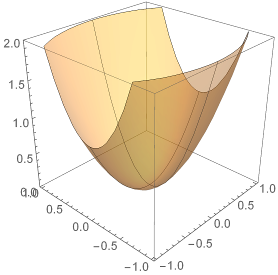
$$(A+C)^2 - 4D = (A-C)^2 + 4B^2 \geqq 0$$

だから実数解を持つ。

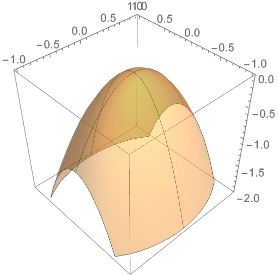
(i) $D > 0$ のとき。 $AC > B^2 \geqq 0$ より A, B は同符号
(i-i) さらに $A > 0$ のとき 固有値はともに正。このとき恒に $\Delta f > 0$ したがって (a, b) で極小。
(i-ii) さらに $A < 0$ のとき 固有値はともに負。だから極大。
(ii) $D < 0$ のとき。 符号の異なる 2 つの固有値を持つ。このとき Δf の符号は (ξ, η) によって変わるから極値をとらない。

2 変数関数

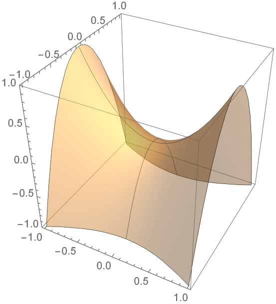
極値問題



(a) (i-i)



(b) (i-ii)



(c) (ii)