

本日やること

① 2変数関数

- 2変数関数とは何か
- 2変数関数のグラフ
- 平面と1次関数

2 変数関数

定義

[復習：1 変数の関数 f]

実数に対して実数を対応させる働き

$$f : x \mapsto y$$

$$y = f(x)$$

例： $y = x + 1,$

$$y = x^2,$$

$$y = \sin x,$$

[2 変数の関数 f]

2 つの実数の組 に対して 1 つの実数
を対応させる働き

$$f : (x, y) \mapsto z$$

$$z = f(x, y)$$

例：縦横の長さがそれぞれ x, y である
長方形について

$$\ell = 2(x + y), \quad \text{周の長さ}$$

$$S = xy, \quad \text{面積}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{対角線の長さ}$$

⋮

2 変数関数

定義

[n 変数の関数 f]

n 個の実数の組 に対して 1 つの実数を対応させる働き

$$f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto z$$

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

x_1, x_2, \dots, x_n : 独立変数 z : 従属変数

$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ が定義される}\} : \text{定義域}$

$f(D) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) | (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D\} : \text{値域}$

2 変数関数

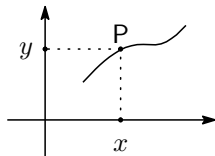
グラフ

[復習：1 変数関数のグラフ]

1 変数関数 $y = f(x)$ のグラフとは

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

のこと。(D は定義域)



点 $P(x, y)$ がグラフ上にある $\iff y = f(x)$

f が連続関数ならば曲線となる。

2 変数関数

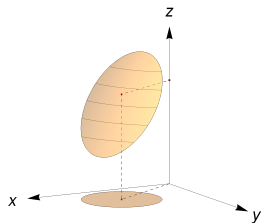
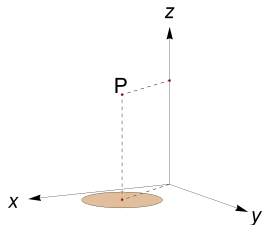
グラフ

2 変数関数のグラフ

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフとは

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$$

のこと。(D は f の定義域)



$P(x, y, z)$ がグラフ上

\iff

$$z = f(x, y)$$

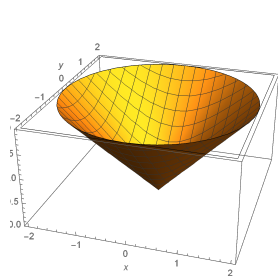
多くの場合曲面になる。

2 変数関数

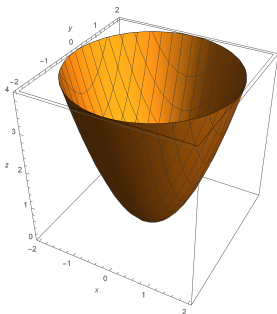
グラフ

[グラフの目的]

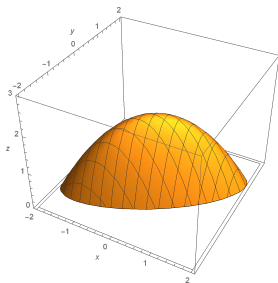
1. グラフを用いると関数の値の変化の様子がよく分かる。
2. 図形をある関数のグラフと見ることにより、図形の性質を関数の計算によって調べることができる。



(a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



(b) $z = x^2 + y^2$

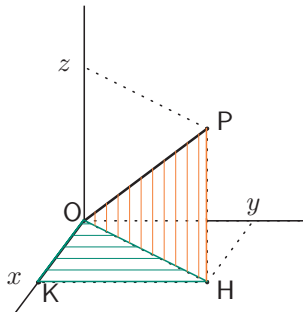


(c) $z = 2 - x^2 + 2xy - 2y^2$

2 変数関数

グラフ

[準備：空間の点と原点の距離]



$P(x, y, z)$, $H(x, y, 0)$, $K(x, 0, 0)$ とおく。
 $\triangle OKH$, $\triangle OHP$ に三平方の定理を用いて

$$OP^2 = OH^2 + HP^2$$

$$OH^2 = KH^2 + OK^2$$

だから

$$OP^2 = OK^2 + KH^2 + HP^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

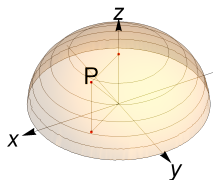
$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2 変数関数

グラフ

[例 8.4] $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ のグラフをかく。

ただし定義域は $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$



グラフ上の点を $P(x, y, z)$ とおくと

$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ だから

$$\iff x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

$$\iff OP = 1, \quad z \geq 0$$

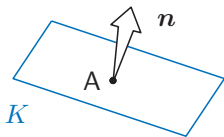
だから P は原点中心半径 1 の球面の上半分の上にある。したがってグラフは原点中心半径 1 の上半球面である。

$(x, y) \in D$ でないと $f(x, y)$ が定義できないことに注意。

2 変数関数

平面と 1 次関数

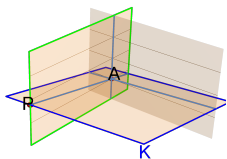
平面の方程式



(i) 点 $A(a, b, c)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, -1)$ と垂直な平面 K の方程式は

$$z - c = \alpha(x - a) + \beta(y - b) \cdots (*)$$

である。

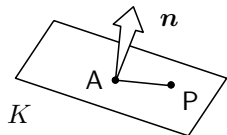


(ii) K と平面 $y = b$ が交わってできる直線の傾き (これを x 方向傾きという) は α である。同様に y 方向傾きは β である。

平面 $y = b$ は A を通って y 軸に垂直な平面である。

2 変数関数

平面と 1 次関数



[確かめ] (i) $P(x, y, z) : K$ 上の A でない任意の点とする。

P は K 上にある. $\iff \vec{AP} \perp \mathbf{n} \dots (**)$

である. また $\vec{AP} = (x - a, y - b, z - c)$ であるから

$$(**) \iff (x - a, y - b, z - c) \bullet (\alpha, \beta, -1) = 0$$

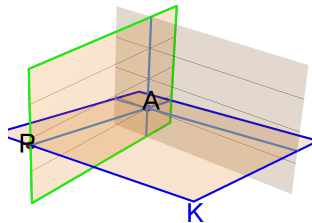
$$\iff \alpha(x - a) + \beta(y - b) - (z - c) = 0$$

$$\iff (*)$$

だから K の方程式は $(*)$ である.

2 変数関数

平面と 1 次関数



(ii) $P(x, y, z)$ を, $A(a, b, c)$ から K 上で y 座標は b のまま変えずに x 軸方向に移動させた点とする。(z 座標は変化する。)

x, y, z は \star を満たすからこれに $y = b$ を代入すると

$$z - c = \alpha(x - a)$$

したがって

$$\alpha = \frac{z - c}{x - a}$$

だから AP の傾きは α 。

2 変数関数

平面と 1 次関数

2 変数の 1 次関数のグラフ

(i) 1 次関数 $f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma$ のグラフは平面である。

(ii) この平面はベクトル $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, -1)$ に垂直であり, x 方向傾きは α , y 方向傾きは β である。

[確かめ] $f(x, y) = z$ とおくと

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma \iff z - \gamma = \alpha(x - 0) + \beta(y - 0)$$

だから前に述べたことからわかる。