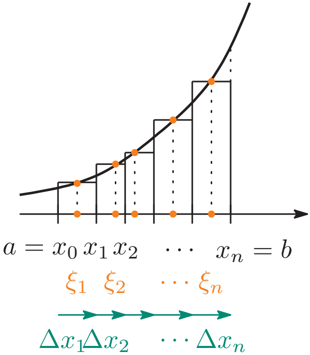
本日やること

1. 積分法
2. 積分法の応用
   - 平面図形の面積
   - 立体の体積

定積分法

復習：定積分の定義

[復習：定積分の定義]



$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

：区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k, \ \ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \ \ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

$|\mathcal{P}| = \max\limits_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$

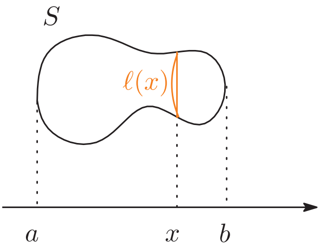
とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (I)



左図のような図形を, 点 $(x, 0)$ を通り x 軸に垂直な直線で切った切り口の長さを $\ell(x)$ とする. $\ell(x)$ が連続であるとき図形の面積 S は

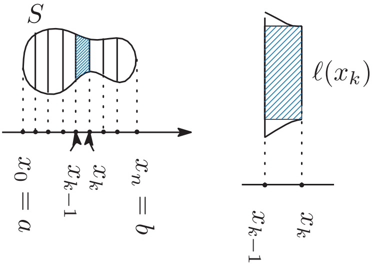
$$S = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

.

積分法の応用

平面図形の面積

[確かめ]



$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

とすると

$$k \text{ 番目の断片の面積} \fallingdotseq \ell(x_k) \times \Delta x_k$$

したがって

$$S \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k$$

分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$S = \lim \sum_{k=1}^{n} \ell(x_k)\Delta x_k = \int_a^b \ell(x)\,dx$$

$\ell(x)\,dx$ は微小長方形の面積であることに注意せよ。

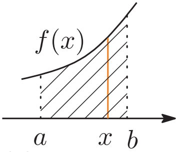
積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II)

$f(x)$, $g(x)$: 連続, S : 斜線部分の面積

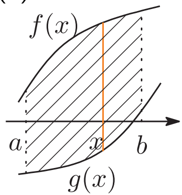
(i)



区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq 0$ であるとき, $\ell(x) = f(x)$ だから

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

(ii)



区間 $[a,b]$ で $f(x) \geqq g(x)$ であるとき, $\ell(x) = f(x) - g(x)$ だから

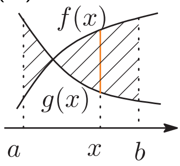
$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$$

積分法の応用

平面図形の面積

平面図形の面積 (II) 続き

(iii)



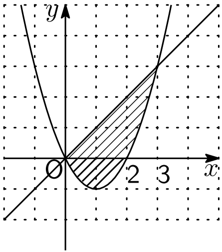
区間 $[a, b]$ で $f(x)$, $g(x)$ の大小関係が一定でないときでも $\ell(x) = |f(x) - g(x)|$ だから

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

積分の応用

平面図形の面積

[例題] 関数 $y = x^2 - 2x \cdots (\star)$ のグラフである放物線と, $y = x \cdots (\star 2)$ のグラフである直線で囲まれる図形の面積を求めよう。



$(\star)$ は $y = x^2 - 2x = x(x-2)$ だから $y = 0$ となるのは $x = 0$ または 2 のとき。 だから x 軸との交点は $(0, 0)$ と $(2, 0)$。 また $y = (x-1)^2 - 1$ だから頂点が $(1, -1)$ の放物線である.

$(\star 2)$ は原点をとおり傾き 1 の直線。

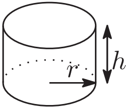
交点の座標は連立方程式 $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = x \end{cases}$ をといて $(0, 0)$ と $(3, 3)$.

この図形は $0 \leqq x \leqq 3$ の範囲にあり, この範囲では $(\star 2)$ が $(\star)$ の上方にあるから面積は

$$\int_0^3 \{x - (x^2 - 2x)\}\, dx = \int_0^3 \{-x^2 + 3x\}\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

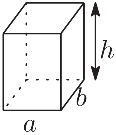
積分の応用
立体の体積

[円柱の体積]



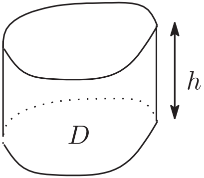
$V = \pi r^2 h$

[四角柱の体積]



$V = abh$

柱体の体積



$V = Sh$

平面図形 D を垂直に h だけ平行移動して得られる立体を底面 D 高さ h の (直) 柱体という。
D の面積を S とするときこの柱体の体積 V は

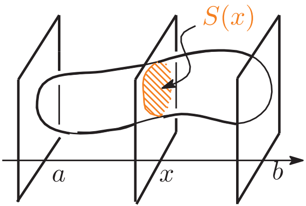
$$V = Sh$$

.

積分の応用

立体の体積

立体図形の体積

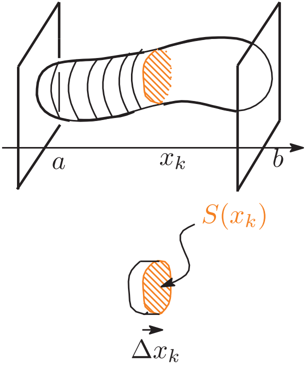


図のような立体図形を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積を $S(x)$ とすると, 体積 V は

$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

積分の応用
立体の体積

[確かめ]



立体を分割 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ によって, x 軸に垂直な平面で薄切りにする。

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$,

とすると (直柱体で近似して)

k 番目の断片の体積 $\fallingdotseq S(x_k) \times \Delta x_k$

したがって

$$V \fallingdotseq \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

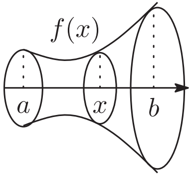
分割を細かくする極限をとると誤差は 0 に近づくことが分かっているので

$$V = \lim \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx$$

($S(x)\,dx$ は微小柱体の体積である)

積分の応用
立体の体積

回転体の体積



曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b \quad (a < b)$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 \, dx$$

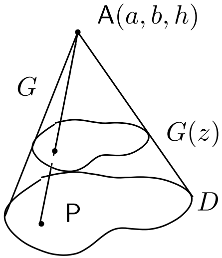
[確かめ]

立体を点 $(x, 0, 0)$ を通り x 軸と垂直な平面で切った切り口は半径 $|f(x)|$ の円であるから, その面積は $S(x) = \pi f(x)^2$ だから。

積分の応用

立体の体積

錐体の体積



D を xy 平面の閉領域とし, 座標 (a,b,h) $(h>0)$ の点を A とする. このとき, D の各点 P と A を結ぶ線分 AP をすべて集めてできる立体図形 G を, D を底面, A を頂点とする錐体という. G の体積 V は D の面積を S とするとき

$$V=\frac{1}{3}Sh$$

である.

積分の応用

立体の体積

[確かめ] G を, 点 $(0,0,z)$ を通り z 軸に垂直な平面で切った断面 $G(z)$ は D と相似で相似比は $h:h-z$, 面積比は $h^2:(h-z)^2$ である. したがって $G(z)$ の面積 $S(z)$ は

$$S(z) = \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 S$$

であり,

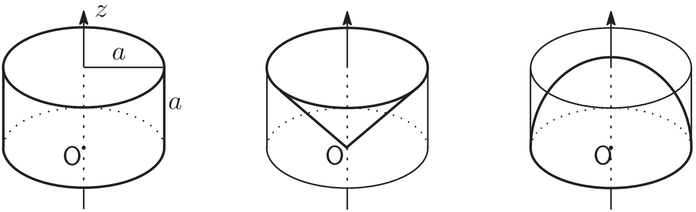
$$V = \int_0^h \left(\frac{h-z}{h}\right)^2 dz\, S = \frac{1}{3} Sh$$

である.

積分の応用

立体の体積

[例題]

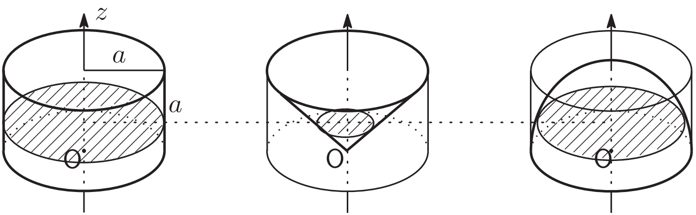


(a) (b) (c)

(a):底面の半径 a, 高さ a の円柱, (b): それに内接する円錐, (c): 半径 a の球の上半部分である.

(a) の体積 V_a, (b) の体積 V_b, (c) の体積 V_c を求め, $V_a = V_b + V_c$ であることを確かめよ.

積分の応用
立体の体積

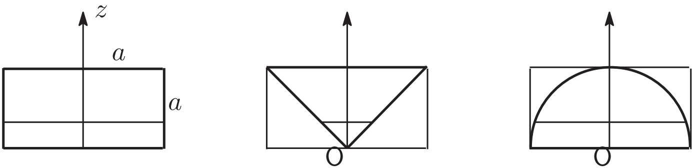


(a)　(b)　(c)

高さ z で切った切り口の面積をそれぞれ $S_a(z)$, $S_b(z)$, $S_c(z)$ とする

積分の応用

立体の体積



(a)　(b)　(c)

$$S_a(z) = \pi a^2, \quad S_b(z) = \pi z^2, \quad S_c(z) = \pi(a^2 - z^2)$$

だから

$$V_a = \int_0^a \pi a^2 \, dz = \pi a^3, \quad V_b = \int_0^a \pi z^2 \, dz = \frac{\pi}{3} a^3,$$

$$V_c = \int_0^a \pi(a^2 - z^2) \, dz = \frac{2\pi}{3} a^3$$

これから $V_a = V_b + V_c$ がわかる。

積分の応用

立体の体積

実は, 任意の z に対して $S_a(z) = S_b(z) + S_c(z)$ であることから

$$V_a = V_b + V_c$$

であることが (積分をしなくとも) 直ちに分かる.