本日やること

1. 積分法
   - 復習：原始関数と不定積分
   - 定積分の置換積分法
   - 広義積分法

積分法

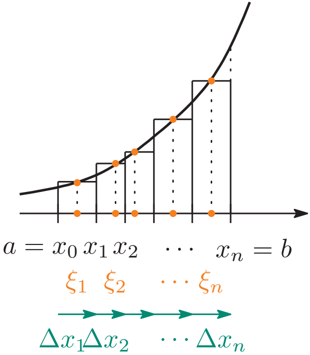
原始関数

復習：原始関数・不定積分の定義

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \iff \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

定積分法

復習：定積分の定義



$y = f(x)$：関数　$a < b$ とし，

$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$

：区間 $[a, b]$ の分割

$x_{k-1} \leqq \xi_k \leqq x_k,\ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の代表の点

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

：小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ の長さ

とする．

$|\mathcal{P}| = \max_{k=1,\cdots,n} |\Delta x_k|$ と定め分割 $\mathcal{P}$ の幅という．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \cdots (\star)$$

定積分法

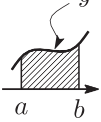
定積分の性質

定積分の大事なこと

(I) $f(x)$ が $[a,b]$ で連続 $\Rightarrow$ $[a,b]$ で積分可能

(II) $f(x) \geqq 0$, $a < b$ のとき

$y = f(x)$ のグラフ

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$ 

の面積

(III) 数直線上の動点の時刻 t での座標を $y = f(t)$, 速度を $v(t)$ とすると

$$\int_a^b v(t)\,dt = f(b) - f(a)$$ (時刻 a から b までの位置の変化量)

定積分法

微分と積分の関係

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \Big[F(x)\Big]_a^b \text{と書く}\right)$

ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

高校ではこれが定義。今回はこれは定理。

2. $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$

定積分法

定積分の部分積分

定理：定積分の部分積分法

$f(x)$, $g(x)$ ：共に微分可能，　$f'(x)$, $g'(x)$ ：共に連続であるとき

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[確かめ] 不定積分の部分積分法は

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

移項して

$$\iff \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = f(x)g(x)$$

両辺定積分して

$$\Rightarrow \int_a^b \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b$$

移項して

$$\iff \int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

定積分法

定積分の部分積分

[例題 6.3.4]　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx$ を計算する.

$\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x$ であるから $\displaystyle\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \cos 2x$ したがって

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' dx = \left[x\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

定積分法

定積分の置換積分法

定積分の置換積分法]

$x = \varphi(t)$: $[\alpha, \beta]$ 上で連続微分可能　$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

[確かめ]

$$\int f(x)\,dx = F(x) \text{ とおくと} \Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t))$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

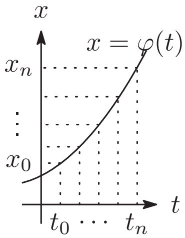
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = [F(\varphi(t))]_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

で一致する.

定積分法

定積分の置換積分法

[別証明] $x = \varphi(t)$ のグラフは図のようであるとする.



$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$: t の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割
$x_k = \varphi(t_k),\ k = 0, \cdots, n$

ならば

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$: x の区間 $[a, b]$ の分割

となる．さらに

$t_{k-1} \leqq \xi_k \leqq t_k, \quad k = 1, \cdots, n$

をとり $\eta_k = \varphi(\xi_k)$ とすると $x_{k-1} \leqq \eta_k \leqq x_k$, また

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ k = 1, \cdots, n$

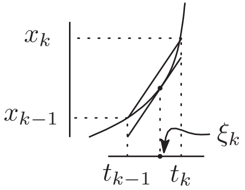
とする。

$$\text{左辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta x_k \qquad \text{右辺} = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\xi_k))\varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

となる。

定積分法

定積分の置換積分法



平均値の定理により

$$\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k} = \frac{dx}{dt}(\xi_k) = \varphi'(\xi_k)$$

となるように ξ_k をとることができるから

$$\Delta x_k = \frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\Delta t_k = \varphi'(\xi_k)\Delta t_k$$

としてよい．したがって

右辺 $=$ 左辺.

定積分法

定積分の置換積分法

[例題] $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ $(a > 0$ は定数$)$ を求める。

$\left(\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right.$ は利用しない。$\Big)$

$x = a\ \sin t,\ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．このとき $\cos t \geqq 0$ だから

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sqrt{1 - \sin^2 t} = a\sqrt{\cos^2 t} = a\ \cos t$$

$\dfrac{dx}{dt} = a\ \cos t$ だから

$$dx = \frac{dx}{dt}\, dt = a\ \cos t\, dt,$$

定積分法

定積分の置換積分法

また

x が 0 から a まで動くとき t は 0 から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動く

となる. だから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t\,dt$$

$\cos^2 t = \dfrac{\cos 2t + 1}{2}$ だから

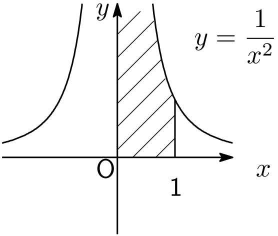
$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\,dt = a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

定積分法
広義積分

$$f(x)\text{ は有界閉区間 }[a,b]\text{ で連続 } \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx\text{ が存在}$$

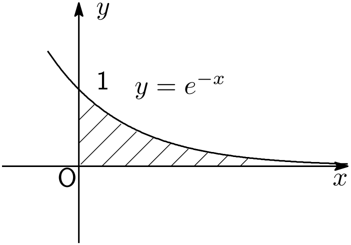
[1. 端の点で不連続な (または連続になるように定義できない) 場合]

例



2. [積分区間が有界でない場合]

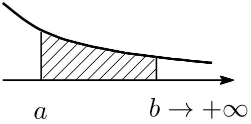
例



の積分も重要である.
このような場合の関数 $f(x)$ の定積分を定めよう.

定積分法
広義積分

[1] 区間 $[a, \infty)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a, \infty)$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_a^\infty f(x)\, dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big[F(x)\Big]_a^b = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^{\infty} = F(\infty) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[2] 区間 $(-\infty, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(-\infty, b]$ で連続である場合, 極限

$$\lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

となる。これを

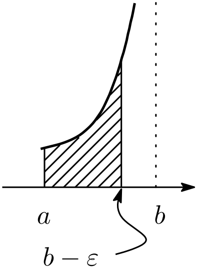
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[3] 区間 $[a, b)$ 上の広義積分の定義



$f(x)$: $[a, b)$ で連続であるが $x = b$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

が存在するとき広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

によって定める.

定積分法

広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \Big[F(x)\Big]_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} F(b-\varepsilon) - F(a)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^{b-0} = F(b-0) - F(a)$$

と書く。

定積分法

広義積分

[4] 区間 $(a, b]$ 上の広義積分の定義

$f(x)$: $(a, b]$ で連続であるが $x = a$ で必ずしも連続でない場合, 極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

が存在するとき広義積分 $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ は収束するといい, その値を

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

によって定める.

定積分法
広義積分

原始関数による計算

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\Big[F(x)\Big]_{a+\varepsilon}^{b} = F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon)$$

となる。これを

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{a+0}^{b} = F(b) - F(a+0)$$

と書く。

定積分法

広義積分

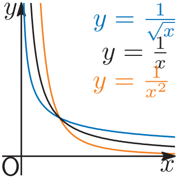
[例題 6.3.5]

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^\infty = -\frac{1}{\infty} - (-1) = 1.$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_1^\infty = \lim_{b\to\infty} \log b - 0 = \infty.$

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x} = \Big[\log x\Big]_{+0}^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to+0} \log\varepsilon = \infty.$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$ であるから $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[2\sqrt{x}\Big]_{+0}^1 = 2 - \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$



定積分法
広義積分

広義積分でも部分積分法・置換積分法が使える

[例 1] $\displaystyle\int e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{2}(e^{-\infty} - e^0) = \frac{1}{2}$$

であるが, $-2x = t$ とおくと $dx = \dfrac{-dt}{2}$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$, $x \to \infty \Rightarrow t \to -\infty$ だから

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \int_0^{-\infty} e^t\,\frac{(-dt)}{2} = -\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^{-\infty} = \frac{1}{2}$$

としてもよい。

定積分法

広義積分

[例 2]

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} xe^{-2x}\,dx &= \int_0^{\infty} x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)'\,dx \\
&= \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\,dx \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$